TRẦN TRỌNG HƯNG

ÔN THI ĐẠI HỌC
MÔN
VẬT LÍ

PHÂN LOẠI & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

- Dao động & sóng cơ học
- Dao động điện & sóng điện từ
- Chuyển động chất điểm

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN TRỌNG HƯNG

ÔN THI ĐẠI HỌC
Môn VẬT LÍ

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN VẬT LÍ

- Dao động và sóng cơ học
- Dao động điện và sóng điện từ
- Chuyển động chất điểm

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chương I

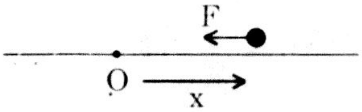
TÍNH CHẤT CHUNG CỦA DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Lực gây nên dao động điều hòa (lực hồi phục)

$$\mathbf{F = -k \cdot x}$$

(N) (N/m) (m)



k là hằng số dương

x : tọa độ vật với gốc tọa độ là vị trí cân bằng O

II. Phương trình động lực học

$$\mathbf{x'' + \omega^2 x = 0} \qquad \text{Với : } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

III. Biểu thức tọa độ - Vận tốc và gia tốc

$$\mathbf{x = A\sin(\omega t + \varphi)}$$

$$\mathbf{V = x' = \omega A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\mathbf{a = x'' = -\omega^2 . x}$$

IV. Chu kì - Tần số - Tần số góc

$$\mathbf{f = \frac{1}{T}}$$

$$\mathbf{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

Đơn vị : f : Hz

T : s

ω : Rad/s

BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1 : VẬN TỐC CỰC ĐẠI

$$\text{Từ } \begin{cases} V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \\ x = A\sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad \text{Suy ra : } |V_{max}| = \omega A$$

Ứng với $x = 0$

Ví dụ : Một dao động điều hòa trên trục x'Ox với gốc tọa độ O là vị trí cân bằng O của vật. Biên độ dao động là A = 10cm và chu kì T = 2s.

Hỏi qua vị trí nào thì vật đạt vận tốc cực đại và vận tốc ấy bằng bao nhiêu ?

Giải

Có : $|V| = \omega A|\cos(\omega t + \varphi)|$

$|V|$ đạt cực đại khi : $|\cos(\omega t + \varphi)| = 1 \quad \rightarrow \quad \sin(\omega t + \varphi) = 0$

$\rightarrow \quad x = A\sin(\omega t + \varphi) = 0$: tại O

Lúc đó : $|V_{max}| = \omega A = \dfrac{2\pi}{T} A = \dfrac{2\pi}{2}.10 = 31{,}4$ (cm/s).

Dạng 2 : VẬN TỐC CỦA VẬT KHI QUA LI ĐỘ x

Từ $\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + \left(\dfrac{V}{\omega}\right)^2 = A^2$

Ví dụ : Phương trình dao động của 1 vật là $x = 5\sin\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm)

Tính vận tốc của vật lúc qua li độ x = 3cm.

Giải

Từ $\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = A^2\sin^2(\omega t + \varphi) \\ \left(\dfrac{V}{\omega}\right)^2 = A^2\cos^2(\omega t + \varphi) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \left(\frac{V}{\omega}\right) = A^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{V}{\omega}\right)^2 = A^2 - x^2$$

$$|V| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 2\pi\sqrt{5^2 - 3^2} = 25{,}12 \text{ (cm/s)}.$$

Dạng 3 : VIẾT PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG

Tuần tự theo 5 bước sau đây :

- Chọn vị trí cân bằng O làm gốc tọa độ
- Viết biểu thức x và V dưới dạng tổng quát : (*) $\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$
- Tìm ω
- Tìm A
- Tìm φ : Muốn tìm φ phải dựa vào điều kiện ban đầu (đề cho hoặc ta tự cho) rồi thế vào cặp phương trình (*) sẽ tìm được φ.

Ví dụ : Viết phương trình chuyển động của vật dao động điều hòa trong các trường hợp sau đây :

a) Vật thực hiện được 10 dao động trong 20s với biên độ dao động là 10cm và gốc thời gian là lúc vật qua vị trí cân bằng theo chiều dương.

b) Vật dao động với tần số f = 5Hz, vận tốc cực đại là 62,8 cm/s và gốc thời gian là lúc vật có li độ âm cực đại.

Giải

Chọn gốc tọa độ là vị trí cân bằng O

Biểu thức x và V : $\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) & (1) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) & (2) \end{cases}$

a) • $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ với $T = \dfrac{20s}{10} = 2s$ $\Rightarrow$ $\omega = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ (rad/s)

- A = 10cm
- Lúc t = 0 thì x = 0 và V > 0

(1) và (2) $\Rightarrow$ $\begin{cases} 0 = A\sin\varphi \\ V = \omega A\cos\varphi > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \cos\varphi > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\varphi = 0$

Vậy : $x = 10\sin\pi t$ (cm).

b) • $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 5 = 10\pi$ (rad/s)

- $V_{max} = \omega A$ $\Rightarrow$ $A = \dfrac{V_{max}}{\omega} = \dfrac{62,8}{10\pi} = 2$cm
- Lúc t = 0 thì x = −2cm nên : (1) $\Rightarrow$ $-2 = 2\sin\varphi$

$\Rightarrow$ $\sin\varphi = -1$ $\Rightarrow$ $\varphi = \pi$

Vậy : $x = 2\sin(10\pi t + \pi)$

$x = -2\sin 10\pi t$ (cm).

Dạng 4 : ĐỊNH THỜI ĐIỂM VẬT QUA LI ĐỘ x_0 VÀ CHIỀU ĐÃ BIẾT

- Vật qua li độ $x = x_0$ thì : $x_0 = A\sin(\omega t + \varphi)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \omega t + \varphi = \alpha + k2\pi \\ \omega t + \varphi = \beta + k2\pi \end{cases}$
- Thay giá trị $(\omega t + \varphi)$ vừa tính vào biểu thức vận tốc $V = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$ để tìm giá trị thích hợp.

Ví dụ : Một vật dao động điều hòa trên trục xOx' với phương trình chuyển động : $x = 10\sin\left(\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm).

Định thời điểm vật qua vị trí x = +5cm theo chiều âm lần đầu tiên kể từ t = 0.

Giải

- $x = 10\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 5 \Rightarrow \quad \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + k2\pi & (1) \\ \pi t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi & (2) \end{cases} \quad (k \in Z)$$

- Vận tốc : $V = 10\pi\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

$(1) \Rightarrow V = 10\pi\cos\left(\frac{\pi}{6} + k2\pi\right) > 0 \qquad (2) \Rightarrow V = 10\pi\cos\left(\frac{\pi}{6} + k2\pi\right) < 0$

- Vì vật đi theo chiều âm nên : $\pi t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \Rightarrow t = \frac{1}{3} + 2k \; (k \in$
- Vật qua x = 5cm lần đầu tiên kể từ t = 0 tức t bé nhất và dương nên :

$$t = \frac{1}{3} \text{ (s).}$$

Dạng 5 : TÌM THỜI GIAN ĐỂ VẬT DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA TỪ M → N

Áp dụng tính chất : dao động điều hòa, biên độ A trên trục x'Ox l hình chiếu chuyển động tròn đều tâm O bán kính A.

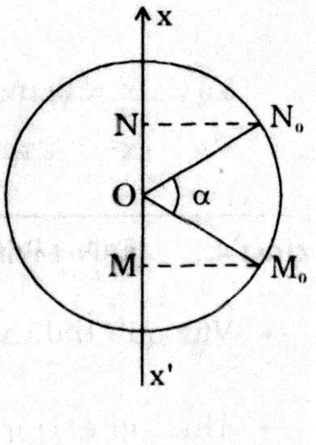
Do đó : $t_{MN} = t_{\overset{\frown}{M_0N_0}}$

+ Tính góc : $\overset{\frown}{M_0N_0} = \alpha$

+ Vì vật chuyển động tròn đều nên thời gian chuyển động tỉ lệ với quãng đường :

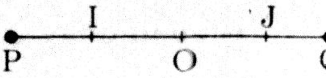
$$\frac{t_{\overset{\frown}{M_0N_0}}}{T} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (\alpha \text{ : tính bằng rad})$$

$$\Rightarrow \quad t_{MN} = t_{\overset{\frown}{M_0N_0}} = \frac{\alpha}{2\pi} \times T$$



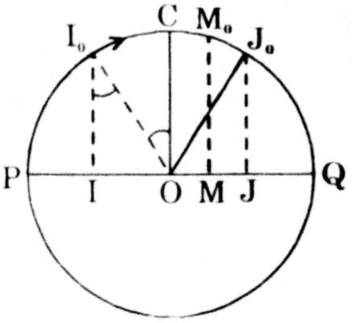
Ví dụ : Một vật dao động điều hòa giữa 2 điểm P, Q với chu kì T = 1s Gọi I và J là trung điểm của PQ (hình vẽ).

Tìm thời gian để vật chuyển động từ I đến J.



Giải

Ta biết : Khi M_0 chuyển động tròn đều trên đường tròn tâm O bá kính OC = A thì hình chiếu của nó là M trên trục x'Ox sẽ **dao động** điều hòa với cùng chu kì T và biên độ dao động là A, vì lẽ **đó thời gian** để vật dao động điều hòa từ I → J cũng là thời gian để **vật chuyển** động tròn đều từ $I_0 \to J_0$.



Dễ dàng có : $\widehat{COI_0} = \widehat{OI_0I}$ (so le trong)

Với $\sin\widehat{OI_0I} = \frac{OI}{OI_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OI_0I} = 30^0$

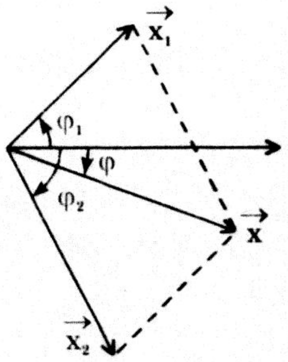
Suy ra : $\widehat{I_0OJ_0} = 2\widehat{I_0OC} = 60^0$

Vì vật chuyển động tròn đều nên thời gian đi được tỉ lệ với quãng đường :

$$\frac{t_{\widehat{I_0J_0}}}{T} = \frac{\widehat{I_0OJ_0}}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{6} \Rightarrow t_{\widehat{I_0J_0}} = \frac{T}{6} = \frac{1}{6}\ (s)$$

Hay : $t_{IJ} = \frac{1}{6}$ (s).

Dạng 6 : TỔNG HỢP 2 DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA CÙNG PHƯƠNG – CÙNG TẦN SỐ



- Cho 2 dao động với $\begin{cases} x_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$
- Dao động tổng hợp : $x = x_1 + x_2 = A\sin(\omega t + \varphi)$

Với $\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ \text{tg}\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$

Ví dụ : Hai dao động cơ học điều hòa cùng phương cùng tần số góc $\omega = 50$ rad/s có biên độ lần lượt là 100mm và 173mm; pha ban đầu lần lượt là 0 và $-\frac{\pi}{2}$. Xác định dao động tổng hợp.

Giải

Biểu thức li độ x của 2 dao động : $\begin{cases} x_1 = 100\sin 50t\ \text{(mm)} \\ x_2 = 173\sin\left(50t - \dfrac{\pi}{2}\right)\ \text{(mm)} \end{cases}$

Dao động tổng hợp : $x = A\sin(50t + \varphi)$ (*)

với : $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$$= \sqrt{100^2 + 173^2 + 2.100.173\cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)} = 200\ (\text{mm})$$

và : $\text{tg}\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \dfrac{100\sin 0 + 173\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{100\cos 0 + 173\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -1{,}73 \approx -\sqrt{3}$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3}$$

(*) $\Rightarrow$ $x = 200\sin\left(50t - \dfrac{\pi}{3}\right)$ (mm).

ĐỀ THI

1.1 Một vật khối lượng m = 1kg dao động điều hòa theo phương ngang với chu kì T = 2s. Nó đi qua vị trí cân bằng với vận tốc $V_0 = 31{,}4$ cm/s.

Viết phương trình dao động điều hòa của vật, chọn t = 0 lúc vật qua vị trí cân bằng theo chiều dương.

Tính lực hồi phục tác dụng lên vật vào lúc t = 0,5s.

(ĐH QUỐC GIA – TP.HCM – 7/97)

Giải

- Chọn gốc tọa độ là vị trí cân bằng O.

Biểu thức x và V theo t : (*) $\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$

với : + $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$ (rad/s)

+ Từ (*) suy ra : $x^2 + \left(\dfrac{V}{\omega}\right)^2 = A^2$

$$0 + \left(\frac{31,4}{\pi}\right)^2 = A^2 \quad \Rightarrow \quad A = 10\ (\text{cm})$$

+ Theo đề : t = 0 thì x = 0 và V > 0.

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} 0 = A\sin\varphi \\ V = \omega A\cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = 0$$

Vậy $x = 10\sin\pi t$ (cm)

- Lực hồi phục : $F = ma = m(-\omega^2 x) = 1(-\pi^2.0,1\sin\pi t) = -\sin\pi t$

(lấy $\pi^2 \approx 10$)

Lúc t = 0,5s : $F = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$ (N)

$|F| = 1$ (N).

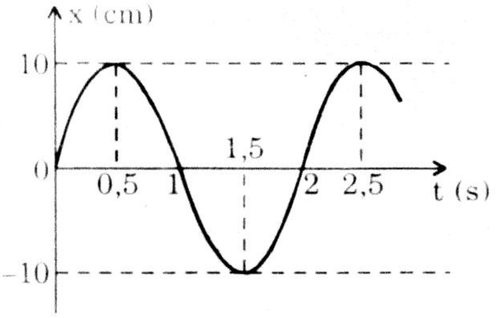
1.2 Một vật khối lượng m dao động điều hòa với li độ **x** được biểu diễn trên hình vẽ. Cơ năng của vật là E = 250J.

1. Viết phương trình dao động của vật.

2. Tìm biểu thức vận tốc của vật và vẽ đồ thị vận tốc trên cùng hệ trục tọa độ đó.

3. Tìm khối lượng m của vật.

Lấy $\pi^2 = 10$.



(ĐH THỦY LỢI – 7/97)

Giải

1. *Phương trình dao động của vật :*

Chọn gốc tọa độ là vị trí cân bằng O của vật.

Phương trình dao động của vật có dạng : $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ (*)

Với : + $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ (rad/s)

+ A = 10cm

+ Lúc t = 0,5s thì x = +10cm nên :

(*) ⇒ $10 = 10\sin(\pi \times 0,6 + \varphi)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

Vậy : $x = 10\sin\pi t$ (cm).

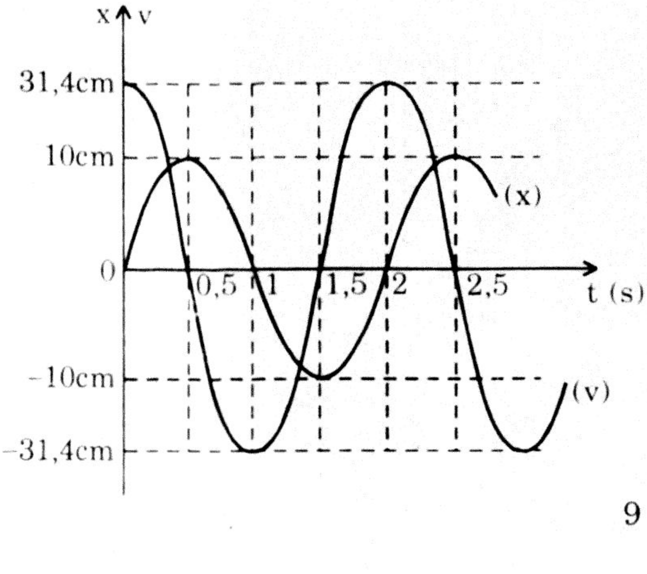
2. *Biểu thức vận tốc và đồ thị :*

$V = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$

$= \pi.10\cos(\pi t + 0)$

$= 31,4\cos\pi t$ (cm/s)

Đồ thị vận tốc (cùng với đồ thị li độ x).



3. Khối lượng của vật :

Cơ năng bằng động năng cực đại : $\mathbf{E = E_{đ(max)} = \frac{1}{2}mV^2_{max}}$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{2E}{V^2_{max}} = \frac{2.250}{(0,1\pi)^2} \quad \textbf{(lấy } \pi^2 \approx 10\textbf{)}$$

$$m = 5000 \text{ (kg)}.$$

1.3 **1.** Một chất điểm chuyển động **trong mặt phẳng xOy** theo quy luật $x = a\sin\omega t$, $y = b\cos\omega t$ trong đó a, **b, ω là các hằng số dương**. Tìm :

a) Phương trình quỹ đạo của chất **điểm**.

b) Độ lớn gia tốc của chất điểm **theo bán kính r của** nó đối với gốc tọa độ.

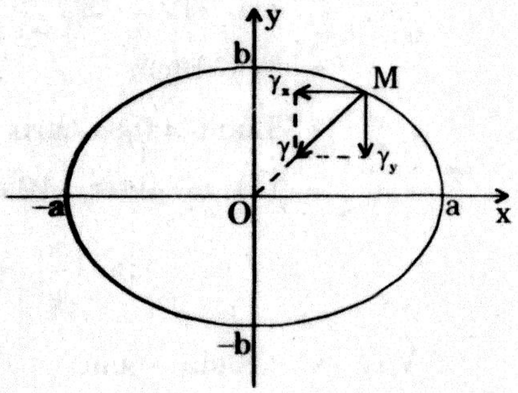
2. Một chất điểm M dao động điều **hòa theo phương** ngang trên đoạn thẳng AB = 2a với chu kì T. Lập **phương trình dao động** của chất điểm, chọn gốc thời gian khi chất điểm **có tọa độ** $\mathbf{x = \frac{a}{2}}$ **và V** < 0.

Tính thời gian để chất điểm **chuyển động từ điểm** P đến điểm Q với $x_P = \frac{a}{2}$; $x_Q = -\frac{a}{2}$.

***(ĐH QUỐC GIA** – TP.HCM – 7/97)*

Giải

1. *a)* *Phương trình quỹ đạo :*



$$\begin{cases} x = a\sin\omega t \\ y = b\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \sin\omega t \\ \frac{y}{b} = \cos\omega t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Quỹ đạo là một đường Elip.

b) *Độ lớn gia tốc của chất điểm :*

Gia tốc $\vec{\gamma}$ của chất điểm có 2 thành **phần** : $\vec{\gamma}\begin{cases} \gamma_x = -\omega^2 x \\ \gamma_y = -\omega^2 y \end{cases}$

Độ lớn của $\vec{\gamma}$: $|\gamma| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$

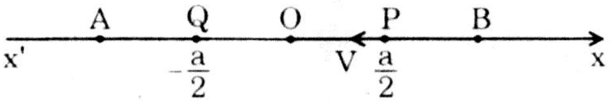
Với $\sqrt{x^2 + y^2} = OM = r$ Vậy : $|\gamma| = \omega^2 r$.

2. *Phương trình và thời gian chuyển động :*

a) Chọn gốc tọa độ là vị trí cân bằng O của chất điểm.

Biểu thức x và V theo t : (*) $\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$

Với : + $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$



+ $A = \dfrac{AB}{2} = a$

+ t = 0 khi $x = \dfrac{a}{2}$ và V < 0 nên :

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2} = a\sin\varphi \\ V = \omega a\cos\varphi < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \cos\varphi < 0 \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{5\pi}{6}$$

Vậy : $x = a\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \dfrac{5\pi}{6}\right)$

b) • Chất điểm qua $Q\left(x = -\dfrac{a}{2}\right)$ lúc t_Q cho bởi : $-\dfrac{a}{2} = a\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t_Q + \dfrac{5\pi}{6}\right)$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_Q + \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2\pi}{T}t_Q + \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi & (1) \\ \dfrac{2\pi}{T}t_Q + \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi & (2) \end{cases} \quad (k \in Z)$$

- Vận tốc chất điểm qua Q : $V = \omega a\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t_Q + \dfrac{5\pi}{6}\right)$

Với giá trị (1), ta được : $V_1 = \omega a\cos\left(-\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\right) > 0$

Với giá trị (2), ta được : $V_2 = \omega a\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\right) < 0$

Để vật qua Q theo chiều âm thì t_Q thỏa (2) :

$$\frac{2\pi}{T}t_Q + \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \Rightarrow t_Q = \left(-\frac{5}{6} + k\right)T$$

Để vật qua Q lần đầu tiên thì $t_Q > 0$ và bé nhất thì k = 1 và :

$$t_Q = \left(-\frac{5}{6} + 1\right)T = \frac{T}{6}$$

Vậy thời gian để chất điểm chuyển động từ P tới Q là : $\Delta t = \dfrac{T}{6}$.

1.4 Cho hai dao động điều hòa cùng phương cùng tần số f = 50Hz có các biên độ $A_1 = 2a$, $A_2 = a$ và các pha ban đầu $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \pi$.

a) Viết các phương trình của 2 dao động đó.

b) Vẽ trên cùng một giản đồ vectơ các vectơ biên độ $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}$ của hai dao động trên cùng và của dao động tổng hợp.

c) Từ giản đồ đó, hãy tính biên độ, pha ban đầu và viết phương trình của dao động tổng hợp.

(ĐH TÀI CHÍNH KẾ TOÁN – HÀ NỘI – 7/77)

Giải

a) *Phương trình của hai dao động :*

Tần số góc : $\omega = 2\pi f = 100\pi$ (rad/s)

Lấy gốc tọa độ là vị trí cân bằng của vật dao động.

$$x_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1) = 2a\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

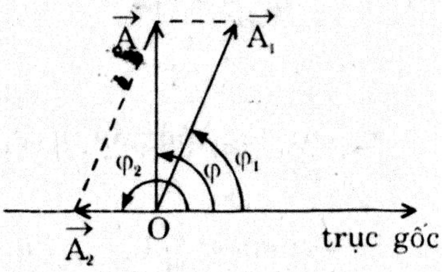
$$x_2 = A_2\sin(\omega t + \varphi_2) = a\sin(100\pi t + \pi)$$

b) *Giản đồ vectơ của hai dao động :*

Dao động tổng hợp của 2 dao động cùng phương và cùng tần số :

$$\begin{matrix} x & = & x_1 & + & x_2 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{A} & = & \vec{A}_1 & + & \vec{A}_2 \end{matrix}$$

Giản đồ vectơ : (hình bên)



c) *Phương trình dao động tổng hợp :*

+ Biên độ dao động tổng hợp :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \sqrt{4a^2 + a^2 + 2.2a.a\cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right)} = a\sqrt{3}$$

+ Pha ban đầu : $$\text{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \frac{2a.\sin\frac{\pi}{3} + a\sin\pi}{2a.\cos\frac{\pi}{3} + a\cos\pi} = +\infty$$

$$\rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Vậy : $x = a\sqrt{3}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Chương II

DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA CỦA CON LẮC LÒ XO

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Lực hồi phục : $\mathbf{F = -k \;.\; x = m \;.\; x''}$

(N) (N/m) (m) (kg) (m/s^2)

k : độ cứng lò xo

x : tọa độ của vật với gốc tọa độ là vị trí cân bằng

m : khối lượng của vật

x'' : gia tốc của vật

II. Chu kì dao động : $\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

III. Năng lượng dao động : $\mathbf{E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2}$

(J)

BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1 : CHIỀU DÀI LÒ XO KHI VẬT DAO ĐỘNG THẲNG ĐỨNG

+ Độ dãn lò xo khi vật ở vị trí cân bằng :

$$\Delta l_0 = \frac{mg}{k}$$

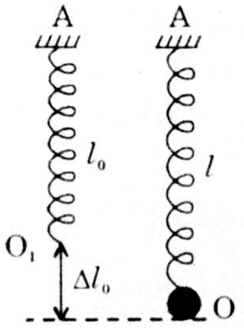
+ Chiều dài lò xo khi vật ở vị trí cân bằng :

$$l = AO = l_0 + \Delta l$$

+ Chiều dài cực đại và cực tiểu của lò xo :

$$l_{max} = l + A$$

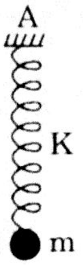
$$l_{min} = l - A$$



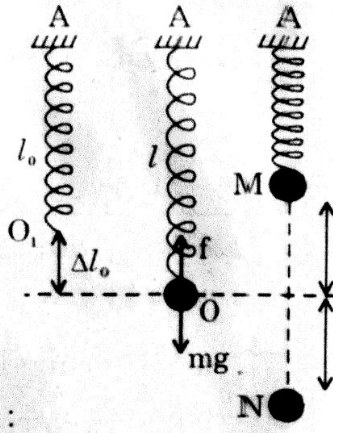
Ví dụ : Một lò xo có chiều dài tự nhiên l_0 = 20cm, độ cứng k = 100N/m. Khối lượng không đáng kể. Một đầu giữ cố định còn đầu kia treo vật nặng m = 100g (Hình vẽ). Cho vật dao động điều hòa thẳng đứng với biên độ A = 2cm. Lấy g = $10m/s^2$. Tính :

a) Độ dãn lò xo khi vật ở vị trí cân bằng

b) Chiều dài cực đại và cực tiểu của lò xo khi vật dao động.



Giải



a) Độ dãn của lò xo :

Lúc cân bằng : $mg = f = k.\Delta l_0$

$$\Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{0,1 \times 10}{100}\ (m) = 1\ (cm)$$

b) Chiều dài cực đại và cực tiểu của lò xo :

+ Khi vật ở vị trí cân bằng :

$$l = AO = l_0 + \Delta l_0 = 21\ (cm)$$

+ Lò xo có chiều dài cực đại khi vật ở biên dưới (N) :

$$l_{max} = l + A = 23\ (cm)$$

+ Lò xo có chiều dài cực tiểu khi vật ở biên trên (M) :

$$l_{min} = l - A = 19\ (cm).$$

Dạng 2 : CHU KÌ – TẦN SỐ

+ Chu kì : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

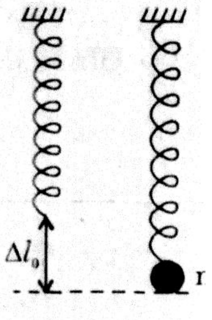
Mà : $\frac{m}{k} = \frac{\Delta l_0}{g}$ (Δl_0 : độ dãn lò xo khi vật cân bằng)

nên : $T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l_0}{g}}$

+ Tần số : $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Ví dụ 1 : Một lò xo treo thẳng đứng. Đầu dưới móc vào vật nặng th nó dãn ra 1cm. Cho vật dao động điều hòa thẳng đứng.

Lấy $g = 9,81 m/s^2 \approx \pi^2$. Tính chu kì dao động.



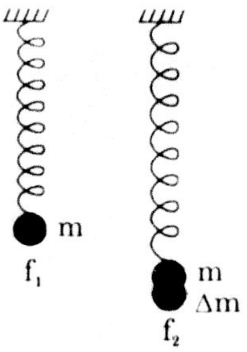
Giải

+ Khi vật cân bằng : $mg = k.\Delta l_0 \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{\Delta l_0}{g}$

+ Chu kì : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,01}{\pi^2}} = 0,2\ (s).$

Ví dụ 2 : Một vật khối lượng m treo bằng một lò xo vào một điểm c định O thì dao động với tần số 5Hz. Treo thêm một gia trọng $\Delta m = 38$ vào vật thì tần số dao động là 4,5Hz. Tính khối lượng m và độ cứng của lò xo.

Giải



Khi treo vật **m** : $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Khi treo vật **(m + Δm)** : $f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + \Delta m}}$

Lập tỉ số : $\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{m + \Delta m}{m}} \Rightarrow \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 = 1 + \frac{\Delta m}{m}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta m}{m} = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 - 1 = \left(\frac{5}{4,5}\right)^2 - 1 = \frac{1}{0,9^2} - 1 = \frac{1 - 0,81}{0,81}$$

$$\frac{38}{m} = \frac{0,19}{0,81} \Rightarrow m = 162\ (g)$$

Thay $m = 0,162$**kg và** $f_1 = 5$**Hz** vào biểu thức của f_1 ta tính được :

$$k = 4\pi^2.m.f_1^2 = 4.10.0,162.5^2 = 162\ (N/m).$$

Dạng 3 : NĂNG LƯỢNG TRONG DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA CỦA CON LẮC LÒ XO

- Động năng : $E_d = \frac{1}{2}mV^2$
- Thế năng : $E_t = \frac{1}{2}kx^2$ **(x là li độ của vật)**
- Cơ năng **(hay năng lượng)** : $E = E_d + E_t = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$

Ví dụ 1 : **Con lắc lò xo gồm** lò xo có độ cứng k = 40N/m và vật nặng m = 100g **dao động điều hòa, khi** qua vị trí cân bằng vận tốc của vật là V_0 = 2m/s. **Tính năng lượng** và biên độ dao động.

Giải

- Cơ năng con lắc : $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

Xét tại 0 : $V = V_0 = 2m/s$ và $x = 0$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} \times 0,1.2^2 = 0,2\ (J)$$

- Và : $E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{K}} = \sqrt{\frac{2.0,2}{40}} = 0,1\ (m) = 10\ (cm).$

Ví dụ 2 : Một con lắc lò xo **gồm quả** nặng gắn vào đầu lò **xo**. Quả nặng dao động điều hòa với biên độ **6cm**. Ở vị trí nào thì động năng của quả nặng bằng 3 lần thế năng của **nó**.

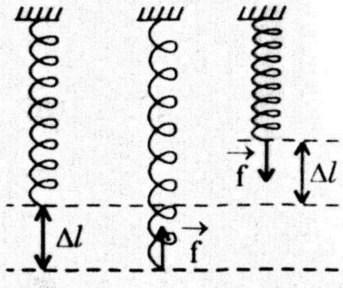
Giải

Có : $E_d + E_t = \frac{1}{2}kA^2$

Với : $E_d = 3E_t$ nên : $4E_t = \frac{1}{2}kA^2$ **hay** $4.\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$

$$|x| = \frac{A}{2} = 3\text{ (cm)}.$$

Dạng 4 : LỰC ĐÀN HỒI – LỰC HỒI PHỤC



I. *Lực đàn hồi (hay lực căng) của lò xo*

- $|f| = k.\Delta l$

  (Δl : độ biến dạng của lò xo)

- Lực đàn hồi cực đại :

  $|f(max)| = k(\Delta l_0 + A)$

  Với Δl_0 : độ biến dạng của lò **xo khi vật ở cân bằng**.

- Lực đàn hồi cực tiểu : $|f(min)| = \begin{cases} k(\Delta l_0 - A) & \text{nếu } \Delta l_0 > A \\ 0 & \text{nếu } \Delta l_0 \le A \end{cases}$

II. *Lực hồi phục*

- Đó là hợp lực của tất cả các lực **tác dụng vào vật**. Hợp lực này có :
  + Hướng về vị trí cân bằng O
  + Giá trị đại số : $F = -k.x$
- Lực hồi phục cực đại và cực tiểu :

  $|F_{max}| = kA$ **(vật ở 2 điểm bên)**

  $F_{min} = 0$ **(vật ở vị trí cân bằng)**.

Ví dụ 1 : Một con lắc lò xo **treo thẳng đứng gồm** lò xo có độ cứng k = 100N/m và viên bi khối lượng **m = 200g**. Lấy g = 10m/s^2. Cho vật dao động điều hòa thẳng đứng với **biên độ A**.

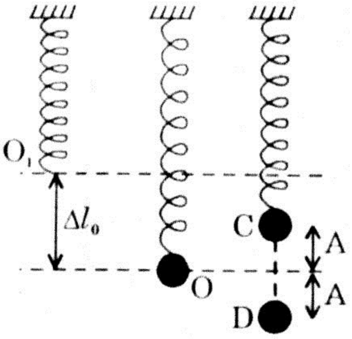
Tính lực đàn hồi cực đại và cực tiểu **của lò xo trong** hai trường hợp :

a) A = 1,5cm **b) A = 3cm**.

Trong mỗi trường hợp tính lực hồi **phục tương** ứng.

Giải

$$\Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{0,2 \times 10}{100} = 0,02 \text{ (m)}$$



a) *A = 1,5cm :*

+ Lực đàn hồi cực đại khi vật ở điểm biên dưới (điểm D) :

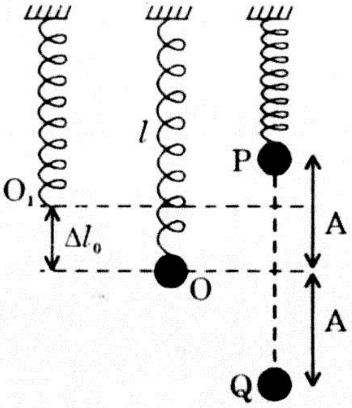
$$f(\max) = k(\Delta l_0 + A) = 100(0,02 + 0,015) = 3,5 \text{ (N)}$$

+ Lực đàn hồi cực tiểu khi vật ở điểm biên trên (điểm C) :

$$f(\min) = k(\Delta l_0 - A) = 100(0,02 - 0,015) = 0,5 \text{ (N)}$$

+ Lực hồi phục trong cả hai trường hợp :

$$|F| = k|x| = kA = 100.0,015 = 1,5 \text{ (N)}$$



b) *A = 3cm :*

+ Lực đàn hồi cực đại khi vật ở Q :

$$f_{\max} = k.O_1Q = k(\Delta l_0 + A) = 100(0,02 + 0,03) = 5 \text{ (N)}$$

+ Lực hồi phục tương ứng :

$$|F| = kA = 100 \times 0,03$$

$$|F_1| = 3 \text{ (N)}$$

+ Vì $A > \Delta l_0$ nên khi dao động có lúc vật qua O_1, lúc đó lò xo không biến dạng và lực đàn hồi lúc đó bằng không.

Vậy : $f_{\min} = 0$

Lúc đó lực hồi phục :

$$|F_2| = k|x| = k.OO_1 = k.\Delta l_0 = 100 \times 0,02 = 2 \text{ (N)}.$$

Ví dụ 2 : Một lò xo treo thẳng đứng, đầu dưới mang vật nặng khối lượng m = 500g. Phương trình dao động của vật : $x = 10\sin t$ (cm)

Tính giá trị lớn nhất và bé nhất mà lò xo tác dụng lên điểm treo (lấy $g = 10\text{m/s}^2$).

Giải

Lực tác dụng lên điểm treo chính là lực đàn hồi của lò xo.

Ta có : $k = m\omega^2 = 0,5(10)^2 = 50$ (N/m)

$$\Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{0,5.10}{50} = 0,1 \text{ (m)}$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/1616

+ Lực lớn nhất mà lò xo tác dụng lên điểm treo chính là lực đàn hồi cực đại

$$|f_{max}| = k(\Delta l_0 + A) = 50(0,1 + 0,1) = 10\ (N)$$

+ Lực bé nhất mà lò xo tác dụng lên điểm treo là lực đàn hồi cực tiểu :

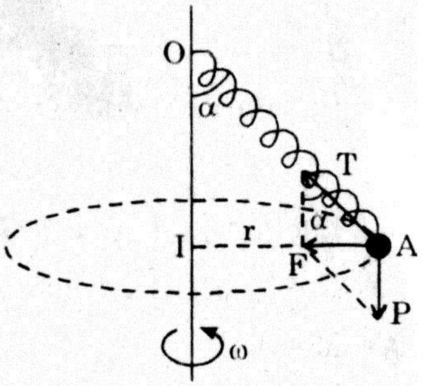
$$f_{min} = k(\Delta l_0 - A) = 50(0,1 - 0,1) = 0.$$

Dạng 5 : LÒ XO QUAY QUANH TRỤC THẲNG ĐỨNG

- $\text{tg}\alpha = \dfrac{F}{P} = \dfrac{m\omega^2 r}{mg} = \dfrac{\omega^2 r}{g}$

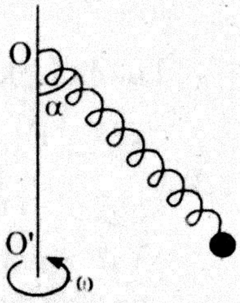
  với $r = l\sin\alpha$ nên : $\cos\alpha = \dfrac{g}{\omega^2 l}$

- Lực đàn hồi T : $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$
- Độ dãn lò xo : $\Delta l_0 = \dfrac{T}{k} = \dfrac{mg}{k\cos\alpha}$
- Chiều dài lò xo lúc quay : $l = l_0 + \Delta l_0$



Ví dụ : Một lò xo có khối lượng không đáng kể, độ dài tự nhiên l_0 = 20cm có độ cứng k = 10N/m. Treo vào đầu lò xo một hòn bi có khối lượng m = 10g rồi quay xung quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω (H. vẽ), khi ấy trục của lò xo làm với trục quay OO' góc $\alpha = 60^0$.

Xác định chiều dài lò xo và số vòng quay trong một giây. Lấy $g = 10m/s^2$.



Giải

- Lực đàn hồi T : $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = \dfrac{0,01 \times 10}{\frac{1}{2}} = 0,2\ (N)$

  Độ dãn lò xo : $\Delta l_0 = \dfrac{T}{k} = \dfrac{0,2}{10} = 0,02\ (m)$

  Chiều dài lò xo : $l = l_0 + \Delta l_0 = 22\ (cm)$

- $\cos\alpha = \dfrac{g}{\omega^2 l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}}$

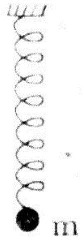
  Tần số : $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{10}{0,22.\frac{1}{2}}} \approx 1,5\ (v/s).$

ĐỀ THI

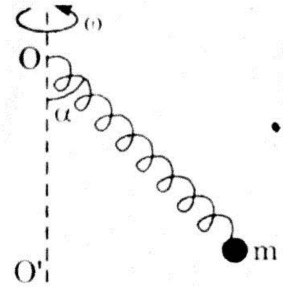
2.1 Một lò xo khối lượng không đáng kể, độ dài tự nhiên 20cm, độ cứng k = 100N/m.

1. Treo một vật khối lượng m = 1kg và một đầu lò xo, còn đầu kia giữ cố định tại O để nó thực hiện một dao động thẳng đứng (H.1). Tìm chu kì dao động của vật.

2. Nâng vật lên khỏi vị trí cân bằng một khoảng 2cm rồi truyền cho vật một vận tốc ban đầu 20cm/s hướng xuống phía dưới. Viết phương trình dao động của lò xo.



Hình 1



Hình 2

3. Quay lò xo quanh trục OO' thẳng đứng (H.2) với vận tốc góc ω, khi ấy trục của lò xo làm với trục quay OO' một góc $\alpha = 30^0$.

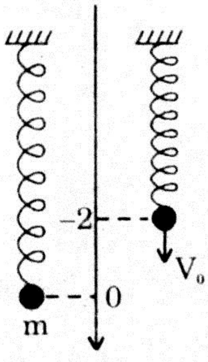
Xác định chiều dài của lò xo và vận tốc góc ω, cho $g = 10\ m/s^2$.

(HỌC VIỆN QUAN HỆ QUỐC TẾ – 7/96)

Giải

1. *Chu kì dao động :* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{100}} \approx 0{,}628\ (s)$

2. *Phương trình dao động của vật :*



Chọn gốc tọa độ là vị trí cân bằng O của vật.

Chiều dương hướng xuống.

Có $\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$ (*)

Với : + $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{100}{1}} = 10\ (rad/s)$

+ Chọn gốc thời gian là lúc vật bắt đầu chuyển động.

t = 0; x = 2cm; V = 20 cm/s

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} -2 = A\sin\varphi \\ 20 = 10A\cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\sin\varphi = -2 \\ A\cos\varphi = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad tg\varphi = -1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \dfrac{-\pi}{4} \\ \varphi = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

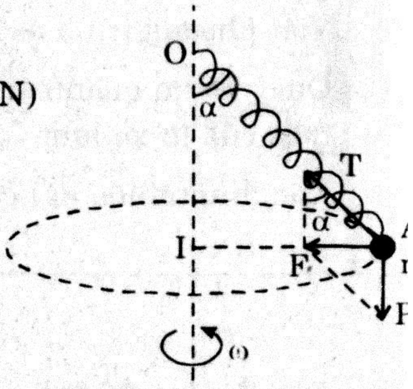
Để $\cos\varphi > 0$ thì $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$

Lúc đó : $A = -\dfrac{2}{\sin(-\pi/4)} = 2\sqrt{2}$ (cm)

Vậy : $x = 2\sqrt{2}\sin\left(10t - \dfrac{\pi}{4}\right)$ (cm).

3. *Chiều dài lò xo khi quay và vận tốc góc ω :*

- Khi lò xo quay đều thì vật m sẽ chuyển động tròn đều trong mặt phẳn nằm ngang nên hợp lực tác dụng vào vật là $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$ hướng tâm I.
- Ta có : $\cos\alpha = \dfrac{P}{T}$



$$\Rightarrow \quad T = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{1\times 10}{\sqrt{3}/2} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ (N)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{\dfrac{20\sqrt{3}}{3}}{100} = 0{,}11547\text{m}$$

Vậy chiều dài lò xo : $l = l_0 + \Delta l_0$

$l \approx 31{,}55$ (cm)

- Hình vẽ cho : $F = mg\text{tg}\alpha$ (1

$\vec{F}$ là lực hướng tâm nên : $F = m\omega^2.r \qquad (r = IA = l\sin\alpha)$

$= m\omega^2 l.\sin\alpha$ (2

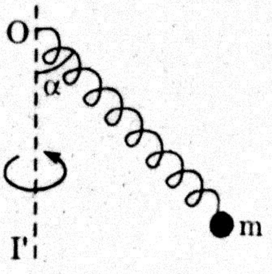
(1) và (2) cho : $\omega^2 = \dfrac{g\text{tg}\alpha}{l\sin\alpha} = \dfrac{g}{l\cos\alpha} = \dfrac{10}{0{,}3155.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 36{,}6$

$\omega \approx 6{,}05$ (rad/s).

2.2 Một lò xo đàn hồi chiều dài tự nhiên $l_0 = 30$cm đầu tiên được giữ c định. Khi treo khối m vào đầu dưới, lò xo dãn $\Delta l = 10$cm. ($g = 10$ m/s^2)

a) Kéo khối m xuống phía dưới thêm 5cm rồi buông tay. Tính chu kì da động, vận tốc cực đại của khối m và viết phương trình dao động (chọ t = 0 là thời điểm buông tay). Bỏ qua các lực cản.

b) Treo lò xo vào điểm cố định I rồi quay lò xo quanh trục thẳng đứng II' với vận tốc không đổi, khi đó trục lò xo hợp với trục quay II' góc $\alpha = 60^0$. Xác định chiều dài lò xo và số vòng quay trong 1 giây.



(ĐH LUẬT HÀ NỘI – 7/1996)

Giải

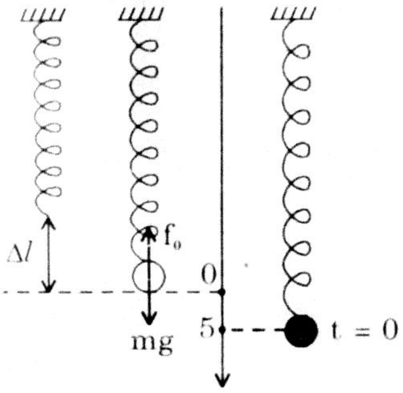
a) *Chu kì dao động - Vận tốc cực đại - Phương trình dao động :*

- $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{g}{\Delta l}} = \sqrt{\dfrac{10}{0,1}} = 10$ (rad/s)

  $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{10} = 0,628$ (s)

- $V_{max} = \omega A$ với A = 5cm

  $= 10.5 = 50$ (cm/s)



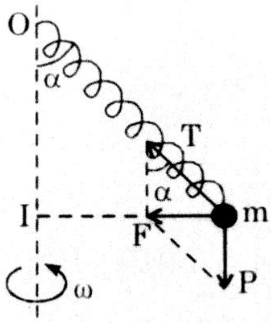
- Chọn gốc tọa độ là vị trí cân bằng O, chiều dương hướng xuống thì :

  $x = A\sin(\omega t + \varphi)$

Lúc t = 0, x = +5cm nên $5 = 5\sin\varphi \rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

Vậy : $x = 5\sin\left(10t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm).

b) *Chiều dài lò xo và số vòng quay :*



- Có $\begin{cases} \bullet\ T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \\ \bullet\ T = k.\Delta l' \end{cases} \Rightarrow \dfrac{mg}{\cos\alpha} = k.\Delta l'$

$\Delta l = \dfrac{m}{k} \cdot \dfrac{g}{\cos\alpha}$ với $\omega^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow \dfrac{m}{k} = \dfrac{1}{\omega^2}$

$= \dfrac{g}{\omega^2 \cos\alpha} = \dfrac{10}{10^2.\dfrac{1}{2}} = 0,2\text{m} = 20\text{cm}$

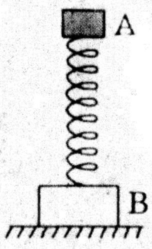
Vậy chiều dài lò xo khi quay : $l = l_0 + \Delta l' = 50$ (cm)

- Có : $\begin{cases} F = mg\text{tg}\alpha \\ F = m\Omega^2 r = m\Omega^2 l\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \Omega^2 = \dfrac{g}{l\cos\alpha} = \dfrac{10}{0,5.\dfrac{1}{2}} = 40$

$\Rightarrow \Omega = 2\sqrt{10}$ (rad/s)

Mà : $\Omega = 2\pi f \Rightarrow f = \dfrac{\Omega}{2\pi} = \dfrac{2\sqrt{10}}{2\pi} \approx 1$ (N/s).

2.3 Một vật A khối lượng $m_1 = 1$kg nối với vật B khối lượng $m_2 = 4,1$kg bằng một lò xo có độ cứng k = 625N/m. Hệ đặt trên bàn như hình vẽ. Kéo vật A ra khỏi vị trí cân bằng một đoạn a = 1,6cm rồi thả cho dao động. Tính :



a) Chu kì dao động của vật A.

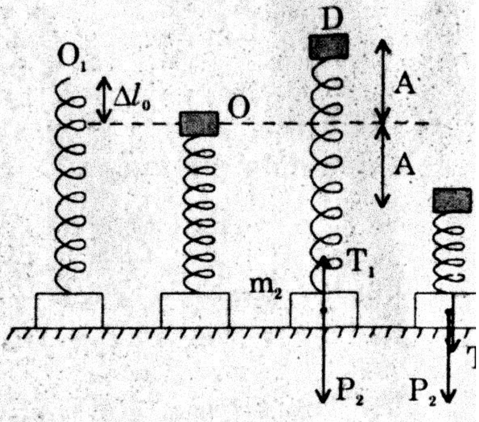
b) Vận tốc cực đại của nó trong quá trình dao động.

c) Lực tác dụng cực đại và cực tiểu lên mặt bàn.

Lấy $g = 9{,}8 m/s^2$.

(ĐH KINH TẾ QUỐC DÂN – 7/199

Giải



a) *Chu kì dao động vật A :*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{625}} = 0{,}2512 \text{ (s)}$$

b) *Vận tốc cực đại :*

$$V_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}.A = \sqrt{\frac{625}{1}}.1{,}6$$

$$= 40 \text{ (cm/s)}.$$

c) *Lực cực đại và cực tiểu lên mặt bàn :*

- Độ co của lò xo khi vật cân bằng :

$$\Delta l_0 = \frac{m_1 g}{k} = \frac{1 \times 9,8}{625} = 0{,}01568 \text{ (m)} = 1{,}568 \text{ (cm)} < A$$

- Vì $\Delta l_0 < A$ nên lúc vật ở điểm biên trên D lò xo bị dãn :

$$\Delta l_1 = O_1D = A - \Delta l_0 = 1{,}6 - 1{,}568 = 0{,}032 \text{ (cm)}$$

Lực đàn hồi của lò xo lúc đó đã kéo vật m_2 lên 1 lực

$$T_1 = k.\Delta l_1 = 625 \times 0{,}032 \times 10^{-2} = 0{,}2 \text{ (N)}$$

- Lực tác dụng lên mặt bàn lúc đó là lực cực tiểu :

$$F_{min} = P_2 - T_1 = m_2g - T_1 = 4{,}1 \times 9{,}8 - 0{,}2 = 39{,}98 \text{ (N)}$$

- Lúc vật ở điểm biên dưới C lò xo đã co :

$$\Delta l_2 = \Delta l_0 + A = 1{,}568 + 1{,}6 = 3{,}168\text{cm}$$

Lực đàn hồi của lò xo lúc đó là lực cực đại và hướng xuống :

$$T_2 = k.\Delta l_2 = 625.3{,}168.10^{-2} = 19{,}8 \text{ (N)}$$

Lực tác dụng lên mặt bàn là lực cực đại :

$$F_{max} = T_2 + P_2 = 19{,}8 + 4{,}1 \times 9{,}8 = 59{,}98 \text{ (N)}.$$

2.4 Một lò xo (khối lượng không đáng kể) có độ cứng 100 (N/m) đầu trê cố định, đầu dưới treo vật có khối lượng 400 (g). Kéo vật xuống dưới v trí cân bằng theo phương thẳng đứng một đoạn $\sqrt{2}$ (cm) và truyền ch nó vận tốc $10\sqrt{5}$ (cm/s). Bỏ qua ma sát.

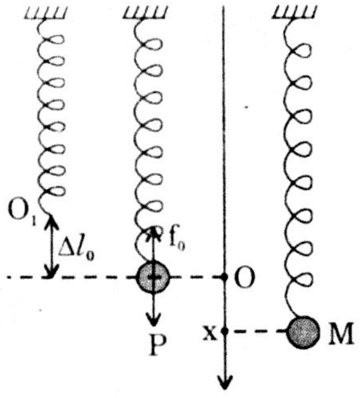
1. Chứng minh vật dao động điều hòa.

2. Viết phương trình dao động của vật với điều kiện chọn gốc tọa độ ở vị trí cân bằng, trục Ox hướng xuống, thời điểm ban đầu (t = 0) vật ở vị trí x = +1cm và chuyển động theo chiều dương Ox. Lấy $\pi^2 = 10$.

3. Treo thêm vật có khối lượng m_2, chu kì dao động của hai vật là 0,5 (s). Tìm chu kì dao động khi chỉ treo m_2.

(ĐH GIAO THÔNG VẬN TẢI – HÀ NỘI – 7/1997)

Giải



1. Chứng minh vật dao động điều hòa :

Vật chịu tác dụng 2 lực :

+ Trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$

+ Lực đàn hồi $\vec{f} = -k.\Delta l$

Tại vị trí cân bằng O : $P = |f_0|$

$$mg = k.\Delta l_0$$

Khi kéo vật lệch ra khỏi vị trí cân bằng O một đoạn $\sqrt{2}$ cm và thả ra thì vật sẽ dao động và lúc qua M với $\overline{OM} = x$ thì vật chịu tác dụng hợp lực :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{f}$$

Chiếu xuống trục x'Ox thẳng đứng hướng xuống :

$$F = mg - k(\Delta l_0 + x) = \underbrace{mg - k\Delta l_0}_{0} - kx = -kx \qquad (1)$$

Theo định luật II Niutơn : $F = ma = mx''$ (2)

(1) và (2) cho : $mx'' = -kx$

$$x'' = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \qquad \text{với} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$\Rightarrow x = A\sin(\omega t + \varphi)$: Biểu thức này chứng tỏ vật dao động điều hòa.

2. *Phương trình dao động của vật :*

+ $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{100}{0,4}} = 5\pi$ (rad/s)

+ Từ $\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = A^2\sin^2(\omega t + \varphi) \\ \left(\dfrac{V}{\omega}\right)^2 = A^2\cos^2(\omega t + \varphi) \end{cases}$ (*)

$$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{V}{\omega}\right)^2 = A^2$$

Với $x = \sqrt{2}$ cm; $|V| = 10\sqrt{5}$ cm/s, ta được

$$2 + \left(\frac{10\sqrt{5}}{5\pi}\right)^2 = A^2 \quad \Rightarrow \quad A = 2\ (\text{cm})$$

+ Điều kiện ban đầu : t = 0 thì $x = +1$cm và $V > 0$

$$(*) \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 = 2\sin\varphi \\ V = \omega A\cos\varphi > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \cos\varphi > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Vậy : $x = 2\sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ (cm).

3. *Chu kì dao động của m_2 :*

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{k} = \frac{T_1^2}{4\pi^2}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2}{k} = \frac{T_2^2}{4\pi^2}$$

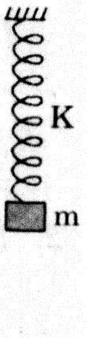
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{T_1^2}{4\pi^2} + \frac{T_2^2}{\pi^2}}$$

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \sqrt{T^2 - T_1^2}$$

Với $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{5\pi} = 0{,}4$ (s) nên $T_2 = \sqrt{0{,}5^2 - 0{,}4^2} = 0{,}3$ (s).

2.5 **1.** Một vật khối lượng m treo vào một lò xo như hình vẽ. Vật dao động điều hòa với tần số $f_1 = 6$Hz khi treo thêm một gia trọng $\Delta m = 44$g thì tần số dao động là $f_2 = 5$Hz. Tính khối lượng m và độ cứng k của lò xo.

2. Xét con lắc trên khi có thêm gia trọng. Ở thời điểm ban đầu vật có li độ −2cm (so với chiều dương quy ước, lấy gốc ở vị trí cân bằng) và có vận tốc 20π cm/s hướng về vị trí cân bằng. Viết phương trình dao động của vật. Lấy $g = \pi^2 = 10$ (m/s^2).



(HỌC VIỆN QUAN HỆ QUỐC TẾ – 7/1997

Giải

1. *Độ cứng k và khối lượng m :*

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + \Delta m}}$$

Lập tỉ số : $\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{m + \Delta m}{m}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta m}{m}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta m}{m} = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 - 1 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 1 = 0{,}44$$

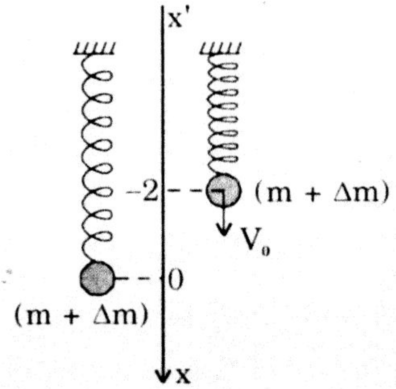
$$\Rightarrow \quad m = \frac{\Delta m}{0{,}44} = \frac{44\,(g)}{0{,}44} = 100\,(g) = 0{,}1\,(kg)$$

và $\quad k = 4\pi^2.f_1^2.m = 4.10.(6)^2.0{,}1 = 144\ (N/m).$

2. *Phương trình dao động của vật (m + Δm) :*

Với gốc ở vị trí cân bằng của hệ thì : $(*)\begin{cases} x = A\sin(\omega_2 t + \varphi) \\ V = \omega_2 A\cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases}$

Với : + $\omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi.5 = 10\pi$ (rad/s)



+ $A^2 = x^2 + \left(\frac{V}{\omega_2}\right)^2$

Ở li độ $x = -2cm$ và $V = 20\pi$ (cm/s)

Ta có : $A^2 = (-2)^2 + \left(\frac{20\pi}{10\pi}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad A = 2\sqrt{2}\ (cm)$$

+ Lúc t = 0 thì $x = -2cm$ và $V > 0$

nên (*) → $\begin{cases} -2 = 2\sqrt{2}\sin\varphi \\ V = \omega_2 A\cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$

Vậy : $\quad x = 2\sqrt{2}\sin\left(10\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ (cm).

2.6 Một con lắc lò xo đặt theo phương thẳng đứng có độ cứng k = 2,7N/m khối lượng quả nặng m = 0,3kg.

1. Tính chu kì T dao động điều hòa của con lắc.

2. Từ vị trí cân bằng O ta kéo quả nặng xuống một đoạn $x_1 = 3cm$ thả ra đồng thời cung cấp cho quả nặng vận tốc $V_1 = 12cm/s$ hướng về vị trí cân bằng. Viết phương trình dao động điều hòa của quả nặng, chọn gốc thời gian tại vị trí cân bằng.

3. Khi quả nặng đi xuống đến vị trí cân bằng O nó tách ra khỏi lò xo và rơi xuống, vận tốc tại điểm chạm đất là $V_2 = 4m/s$. Tính khoảng cách từ O đến mặt đất. Cho gia tốc trọng trường $g \doteq 10m/s^2$.

(ĐH THỦY SẢN – NHA TRANG – 7/1997)

Giải

1. *Chu kì dao động :* $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,3}{2,7}} = \frac{2\pi}{3} \approx 2,09\ (s)$.

2. *Phương trình chuyển động :*

Chọn gốc tọa độ là vị trí cân bằng O.

$$(*)\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Với $+\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 3\,(rad/s)$

$$+\ x^2 + \left(\frac{V}{\omega}\right)^2 = A^2 \quad\rightarrow\quad (3)^2 + \left(\frac{12}{3}\right)^2 = A^2 \quad\rightarrow\quad A = 5\ (cm)$$

- Chọn t = 0 lúc vật qua vị trí cân bằng theo chiều dương : t = 0, x = 0 và V > 0

$$(*) \rightarrow \begin{cases} 0 = A\sin\varphi \\ V = \omega A\cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = 0$$

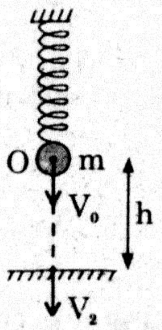
Vậy : x = 5sin3t (cm).

3. *Khoảng cách từ O đến mặt đất :*

- Để tìm vận tốc lúc vật qua O ta thay x = 0 vào biểu thức :

$$x^2 + \left(\frac{V}{\omega}\right)^2 = A^2,\ \text{ta được}\ 0 + \left(\frac{V_0}{3}\right)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow\quad |V_0| = 15\ (cm/s) = 0,15\ (m/s)$$



- Định luật bảo toàn cơ năng : $mgh + \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV_2^2$

$$\Rightarrow\quad h = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{4^2 - (0,15)^2}{20} \approx 0,799\ (m).$$

2.7 Treo quả cầu có khối lượng m vào lò xo có độ cứng k thì khi quả cầu đứng yên cân bằng lò xo dãn ra một đoạn Δl = 4cm. Kéo quả cầu theo phương thẳng đứng xuống dưới (chọn chiều này là chiều dương) một đoạn nhỏ rồi buông không vận tốc đầu. Bỏ qua khối lượng của lò xo và lực cản của môi trường. Lấy $g = 10m/s^2$ và $\pi^2 = 10$.

a) Tính chu kì dao động quả cầu.

b) Viết phương trình dao động quả cầu, biết rằng khi đi qua vị trí cân bằng vận tốc của quả cầu có độ lớn V = 31,4cm/s. Chọn gốc thời gian là lúc buông quả cầu.

c) Khi quả cầu cách vị trí cân bằng 1cm thì vận tốc bao nhiêu ?

(CAO ĐẲNG SƯ PHẠM TP.HCM – 7/1997)

Đáp số : **a)** $T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}} = 0,4\ (s)$ **b)** $x = 2\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ (cm)$

c) $V = 5\sqrt{3}\,\pi \approx 27,2\ (cm/s)$.

2.8 Một quả cầu nhỏ khối lượng 300g được treo vào đầu một lò xo có độ cứng 30N/m đặt thẳng đứng, đầu kia gắn cố định.

1. Chọn gốc thời gian ở vị trí cân bằng của quả cầu, chiều dương hướng xuống, gốc thời gian là lúc quả cầu bắt đầu dao động. Hãy viết phương trình dao động của quả cầu theo hai kiểu kích thích sau :

a) Nâng quả cầu lên khỏi vị trí cân bằng 4cm rồi buông ra không vận tốc ban đầu.

b) Kéo quả cầu xuống khỏi vị trí cân bằng 4cm rồi truyền cho nó vận tốc ban đầu $V_0 = 40cm/s$ hướng xuống.

2. Tính lực đàn hồi cực đại của lò xo trong hai trường hợp trên.

Lấy $g = 10m/s^2$.

(ĐH GIAO THÔNG VẬN TẢI TP.HCM – 1997)

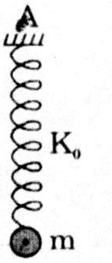
Đáp số : **1. a)** $x = 4\sin\left(10\pi t - \frac{\pi}{2}\right)(cm)$

b) $x = 4\sqrt{2}\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\ (cm)$.

2. $F_{max} = k(\Delta l_0 + A)$

$F_{a(Max)} = 4,2\ (N)$ và $F_{b(Max)} \approx 4,7\ (N)$.

2.9 Một lò xo có khối lượng không đáng kể, có độ dài tự nhiên l_0 và độ cứng k_0 được treo thẳng đứng vào một điểm cố định A. Nếu treo vật có khối lượng m_1 bằng 50g vào lò xo thì nó dãn thêm 2mm. Nếu treo vật có khối lượng m_2 bằng 100g vào lò xo thì nó có độ dài 20,4cm.



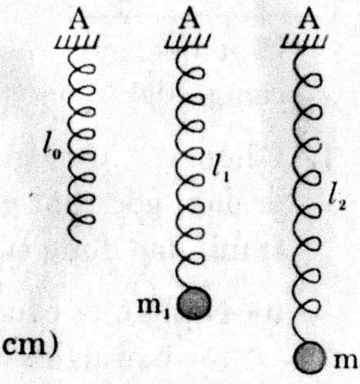
a) Xác định l_0, k_0.

b) Treo vào lò xo vật có khối lượng m = 500g. Sau đó kéo vật khỏi vị trí cân bằng 2,5cm và thả cho dao động không có vận tốc ban đầu. Viết phương trình dao động lấy gốc thời gian lúc thả. Tính lực đàn hồi cực tiểu của lò xo và lực cực đại tác dụng vào điểm treo A trong quá trình dao động.

c) Thay lò xo trên bằng một lò xo khác có khối lượng không đáng kể và cho dao động (vẫn với vật m ở trên) với cơ năng bằng 10^{-2} J. Hãy viết phương trình dao động lấy gốc thời gian lúc có vận tốc V = 0,1m/s và gia tốc $a = -\sqrt{3}\ m/s^2$. Bỏ qua ma sát và sức cản. Lấy gia tốc $g = 10 m/s^2$.

(ĐH KIẾN TRÚC HÀ NỘI – 7/1997)

Giải



a) *Chiều dài l_0 và độ cứng k_0 :*

- Lúc vật m_1 cân bằng : $m_1g = k_0(l_1 - l_0)$

$$\Rightarrow \quad k_0 = \frac{m_1 g}{l_1 - l_0} = \frac{0,05 \times 10}{0,002} = 250 \text{ (N/m)}$$

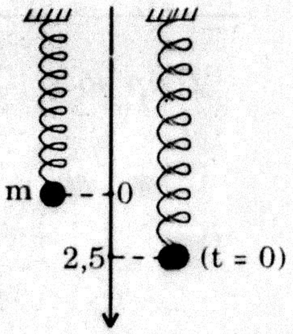
- Lúc vật m_2 cân bằng : $m_2g = k_0(l_2 - l_0)$

$$l_2 - l_0 = \frac{m_2 g}{k_0} = \frac{0,1 \times 10}{250} = 0,004 \text{ (m)} = 0,4 \text{ (cm)}$$

$$l_0 = l_2 - 0,4 = 20,4 - 0,4 = 20 \text{ (cm)}.$$

b) • *Phương trình dao động :*

Chọn gốc tọa độ là vị trí cân bằng O thì : $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ (*)



Với : + $\omega = \sqrt{\dfrac{k_0}{m}} = \sqrt{\dfrac{250}{0,5}} = 10\sqrt{5}$ (rad/s)

+ A = 2,5 (cm)

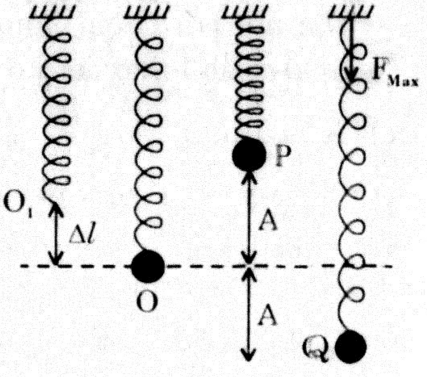
+ Chọn chiều dương hướng xuống thì : t = 0, x = + 2,5cm nên phương trình

(*) → $2,5 = 2,5\sin\varphi$

$$\sin\varphi = 1 \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Vậy : $x = 2,5\sin\left(10\sqrt{5}.t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm).

- *Lực đàn hồi cực tiểu :*



Độ dãn lò xo khi vật ở vị trí cân bằng :

$$\Delta l = \frac{mg}{k_0} = \frac{0,5 \times 10}{250} = 0,02\text{m} = 2\text{cm}$$

Khi $A > \Delta l$ nên trong khi dao động có lúc vật qua O_1, lúc đó lò xo không biến dạng, lực đàn hồi bằng 0.

Vậy : $F_{dh\,(min)} = 0$

- *Lực cực đại tác dụng vào điểm treo A :*

Lực tác dụng vào điểm treo A chính là lực đàn hồi của lò xo, lực tác dụng này cực đại khi vật ở điểm biên Q :

$$F_{max} = k_0.O_1Q = k_0(\Delta l + A) = 250(2 + 2,5) \times 10^{-2} = 11,25\ (N).$$

c) *Phương trình dao động :*

Chọn gốc tọa độ là vị trí cân bằng của vật thì :

$$\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) & (1) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) & (2) \\ a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi) & (3) \end{cases}$$

- Cơ năng : $E = \dfrac{1}{2}m\omega^2A^2 \rightarrow (\omega A)^2 = \dfrac{2E}{m} = \dfrac{2 \times 10^{-2}}{0,5} = 4.10^{-2}\ (m/s^2)$

$$\Rightarrow \quad \omega A = 2.10^{-1} = 0,2\ (m/s) \qquad (4)$$

- Thay t = 0, $\omega A = 0,2m/s$ và $V = 0,1m/s$ vào (1) :

$$0,1 = 0,2\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

- Thay t = 0; $\omega A = 0,2m/s$, $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{3}$ và $a = -\sqrt{3}\,(m/s^2)$ vào (3) :

$$-\sqrt{3} = -\omega(0,2).\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\sqrt{3}}{0,2.\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)}$$

Vì $\omega > 0$ nên chỉ nhận $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ với $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{0,2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 10\ (rad/s)$$

- (4) → $A = \dfrac{0,2}{10} = 0,02\ (m) = 2\ (cm)$

Vậy : $x = 2\sin\left(10t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ (cm).

2.10 Xét một hệ quả cầu và lò xo đang dao động điều hòa theo phương thẳng đứng. Chu kì dao động của hệ là T = 1s, nếu chọn chiều dương của trục tọa độ hướng xuống và điểm gốc tọa độ hướng xuống và điểm gốc tọa độ là vị trí cân bằng O thì sau khi hệ bắt đầu dao động được 2,5s quả cầu ở tọa độ $x = -5\sqrt{2}$ cm đi theo chiều âm của quỹ đạo và vận tốc đạt giá trị $10\pi\sqrt{2}$ cm/s.

---

1. Viết phương trình chuyển động của vật.
2. Gọi M và N là vị trí thấp nhất vào cao nhất của quả cầu. Gọi trung điểm của OM và Q là trung điểm của ON. Hãy tính vận trung bình của quả cầu trên đoạn đường từ P → Q.
3. Tính lực đàn hồi của lò xo lúc hệ bắt đầu dao động và sau khi bắt dao động được 2,5s. Biết rằng lực kéo đàn hồi nhỏ nhất của lò xo tr quá trình dao động bằng 6N. Lấy $\pi^2 = 10$; $g = 10\ m/s^2$.

(ĐH BÁCH KHOA – 1

Giải

1. ***Phương trình chuyển động :***

$$(*)\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Với : + $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$ (rad/s)

+ Chọn t = 0 lúc hệ bắt đầu dao động thì lúc t = 2,5s ;

$x = -5\sqrt{2}$ cm và $V = -10\pi\sqrt{2}$ cm/s nên :

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} -5\sqrt{2} = A\sin(5\pi + \varphi) \\ -10\pi\sqrt{2} = 2\pi.A\cos(5\pi + \varphi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\sqrt{2} = -A\,\text{si} \\ -5\sqrt{2} = -A\,\text{co} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg}\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Và $A = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sin\pi/4} = 10$ (cm)

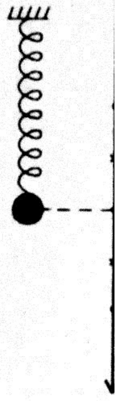
Vậy : $x = 10\sin\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (cm) (**)

2. ***Vận tốc trung bình từ P → Q :***

- Chọn t = 0 lúc vật qua P và đi lên thì : x = 5cm và V < 0

$$(*) \rightarrow \begin{cases} 5 = 10\sin\varphi \\ V = \omega A\cos\varphi < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \cos\varphi < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{5\pi}{6}$$



Vậy : $x = 10\sin\left(2\pi t + \dfrac{5\pi}{6}\right)$ (cm)

- Quả cầu qua Q và đi lên : $x = -5\text{cm}$ và $V < 0$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} -5 = 10\sin\left(2\pi t_Q + \dfrac{5\pi}{6}\right) \\ V = \omega A\cos\left(2\pi t_Q + \dfrac{5\pi}{6}\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(2\pi t_Q + \dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2} \\ \cos\left(2\pi t_Q + \dfrac{5\pi}{6}\right) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi t_Q + \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad \Rightarrow \quad t_Q = \frac{1}{6} + k\ (s) \quad (k \in Z)$$

Quả cầu qua Q lần đầu tiên kể từ t = 0 nên $t_Q > 0$ và bé nhất, vậy :

$$t_Q = \frac{1}{6}\ (s)$$

- Vận tốc trung bình : $\overline{V} = \dfrac{PQ}{t_Q - t_P} = \dfrac{10\text{cm}}{\dfrac{1}{6}\text{s}} = 60\ (\text{cm/s})$.

3. Lực đàn hồi của lò xo :

- Lực kéo đàn hồi nhỏ nhất khi quả cầu ở điểm biên trên, lúc đó lò xo dãn $(\Delta l_0 - A)$:

$$|F_{min}| = k(\Delta l_0 - A) \qquad \text{với} \quad l_0 = \frac{mg}{k}$$

$$= k\left(\frac{mg}{k} - A\right) = mg - kA$$

Hay : $\quad 6 = m \times 10 - k.0,1 \qquad (1)$

Và : $\quad k = m\omega^2 = m(2\pi)^2 = 40m \qquad (2)$

(1) và (2) cho : $\begin{cases} k = 40\,(N/m) \\ m = 1\,(kg) \end{cases}$

- Lúc t = 0 phương trình (**) cho : $x_1 = 5\sqrt{2} \approx 0,0707$ (m) ở vị trí này lò xo dãn $(\Delta l_0 + x_1)$ nên lực đàn hồi là :

$$|T_1| = k(\Delta l_0 + x_1) \qquad \text{với} \quad \Delta l_0 = \frac{mg}{k} = 0,25\ (m)$$

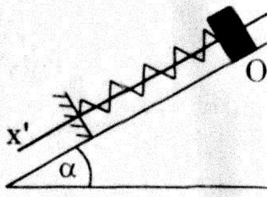
$$= 40(0,25 + 0,0707) = 12,828\ (s)$$

- Lúc t = 2,5s, phương trình (**) cho : $x_2 = -5\sqrt{2}$ (cm) ở vị trí này lò xo dãn $(\Delta l_0 - |x_2|)$ nên lực đàn hồi là :

$$|T_2| = k(\Delta l_0 - |x_2|) = 40(0,25 - 0,0707) = 7,172\ (s).$$

2.11 Cho một lò xo lí tưởng có độ cứng k, độ dài tự nhiên l_0 treo lò xo th đứng và móc vào đầu dưới của lò xo một vật có khối lượng m và c dày không đáng kể. Khi ấy lò xo dài l_1. Cho biết l_0 = 12cm, l_1 = 14 m = 200g, g = 10m/s^2.

1. Hãy tính độ cứng k của lò xo.
2. Cho vật m (gắn với lò xo) dịch chuyển dọc theo đường dốc chính của một mặt phẳng nghiêng một góc α so với phương ngang (Hình vẽ).



Khi vật đứng cân bằng, lò xo dài l_2 = 11cm và vật ở vị trí O. Bỏ ma sát.

a) Tính góc α.

b) Chọn trục tọa độ x'x song song với đường dốc chính có gốc ở Người ta kéo vật ra khỏi vị trí O đến điểm có tọa độ x_1 = +4,5cm buông ra. Hãy thành lập phương trình chuyển động của vật và t chu kì dao động.

(ĐỀ TS

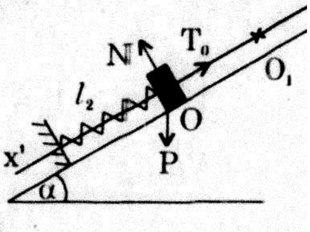
Giải

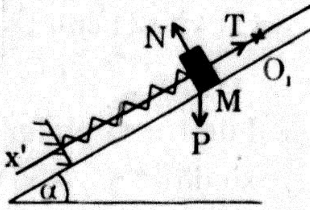
1. *Độ cứng k của lò xo :*

Lúc vật cân bằng : $mg = k(l_1 - l_0)$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{mg}{l_1 - l_0} = \frac{0,2 \times 10}{(14-12).10^{-2}} = 100 \text{ (N/m)}$$

2.a) *Góc α :*





- Khi vật ở vị trí cân bằng O lò xo bị co lại khoảng $O_1O = \Delta l_0$.

Ta có : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T_0} = \vec{0}$

Chiếu xuống trục x'x :

$$-mg\sin\alpha + 0 + k\Delta l_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{k\Delta l_0}{mg}$$

với : $\Delta l_0 = l_0 - l_2 = 1$ (cm) nên : $\sin\alpha = \dfrac{100.10^{-2}}{0,2 \times 10} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 3($

b) *Phương trình chuyển động – chu kì :*

Sau khi thả vật qua M (x = $\overline{OM}$), hợp lực tác dụng vào vật :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$$

Chiếu xuống trục x'x : $F = -mg\sin\alpha + 0 + k(\Delta l_0 - x)$

$$= \underbrace{(-mg\sin\alpha + k.\Delta l)}_{0} - k.x = -kx \qquad (1)$$

Theo định luật II Niutơn : $F = ma = mx''$ (2)

(1) và (2) cho : $mx'' = -k.x \Rightarrow x'' = -\frac{k}{m}x = -\omega^2.x$

với $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow x = A\sin(\omega t + \varphi)$ (3)

Ta có : + $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0,2}} = 10\sqrt{5}$ (rad/s)

+ $A = 4,5$ (cm)

+ Chọn $t = 0$ là lúc buông ($x = +4,5$cm)

(3) → $+4,5 = 4,5\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

Vậy : $x = 4,5\sin\left(10\sqrt{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$ (cm)

Chu kì : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10\sqrt{5}} \approx 0,28$ (s).

2.12 **1.** Ở vị trí nào vật dao động điều hòa có vận tốc bằng không ? Ở vị trí nào có vận tốc lớn nhất ? Hãy chứng minh những điều khẳng định ấy.

2. Một lò xo khối lượng không đáng kể, có độ cứng k = 100N/m được treo thẳng đứng, đầu trên cố định, đầu dưới treo một vật có khối lượng m = 100g.

a) Xác định độ dãn của lò xo khi vật cân bằng.

b) Kéo vật xuống dưới vị trí cân bằng theo phương thẳng đứng một đoạn 1cm rồi truyền cho nó vận tốc 10π cm/s theo hướng xuống dưới. Bỏ qua mọi ma sát, vật dao động điều hòa.

+ Viết phương trình dao động của vật. Chọn trục tọa độ có gốc là vị trí cân bằng chiều dương hướng xuống dưới và thời điểm ban đầu (t = 0) là lúc thả vật.

+ Tính chu kì dao động của vật. Lấy $g = 10m/s^2$ và $\pi^2 = 10$.

(ĐH THỦY LỢI – 98)

Giải

1. *Vị trí vật dao động điều hòa có vận tốc bằng không và vận tốc lớn nhất :*

- Vật dao động điều hòa có vận tốc bằng không khi vật có li độ cực đại hoặc cực tiểu : $x = \pm A$.

- Vật dao động điều hòa có vận tốc lớn nhất khi vật có li độ bằng không $x = 0$.

Thật vậy :

+ Vận tốc : $V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow \cos(\omega t + \varphi) = 0$

$\Rightarrow \sin(\omega t + \varphi) = \pm 1$

Lúc đó : $x = A\sin(\omega t + \varphi) = \pm A$

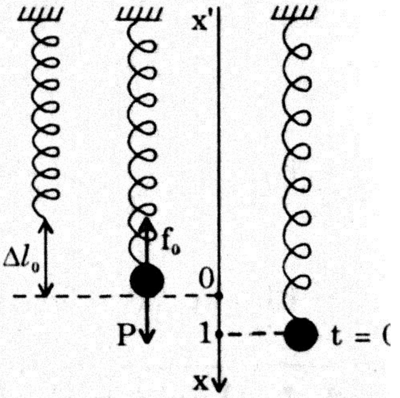
+ Độ lớn vận tốc : $|V| = \omega A|\cos(\omega t + \varphi)|$

$|V|$ lớn nhất khi $|\cos(\omega t + \varphi)| = 1 \Rightarrow \sin(\omega t + \varphi) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

2.a) ***Độ dãn lò xo khi vật cân bằng :***

Vật chịu tác dụng 2 lực :



- Trọng lực $\vec{P}$

- Lực đàn hồi $\vec{f}_0$ khi cân bằng : $\vec{P} + \vec{f}_0 = \vec{0}$

Chiếu xuống trục x'x :

$$P - |f_0| = 0$$

$$mg - k\Delta l_0 = 0$$

$$\Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{0,1 \times 10}{100} = 0,01\ (m) = 1\ (cm)$$

b) Phương trình dao động và chu kì :

+ Phương trình dao động : $x = A\sin(\omega t + \varphi)$

Với : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \sqrt{\frac{100}{0,1}} = 10\pi\ (rad/s)$

Và : $t = 0$, $x = 1cm$ và $V = 0$ nên :

Từ $\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = A\sin\varphi & (1) \\ 0 = \omega A\cos\varphi & (2) \end{cases}$

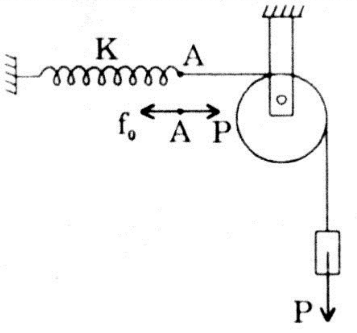
$(2) \rightarrow \cos\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \left[\begin{array}{l} +\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$ $\quad (1) \rightarrow \sin\varphi > 0$ (vì $A > 0$)

Nên chỉ nhận $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ và : $A = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} = 1\ (cm)$

Vậy : $x = 1.\sin\left(10\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm)

+ Chu kì : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{10\pi} = 0{,}2$ (s).

2.13 Một con lắc lò xo được vắt qua ròng rọc cố định như hình vẽ bên. Biết khối lượng của vật m = 200g, độ cứng của lò xo k = 20N/m. Bỏ qua khối lượng của ròng rọc, của lò xo và dây nối, bỏ qua ma sát và sức cản môi trường.



1. Tìm độ dãn của lò xo khi hệ ở vị trí cân bằng.

2. Khi bị kích thích vật dao động điều hòa với tần số góc $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Hãy viết phương trình dao động của vật, lấy gốc tọa độ tại vị trí cân bằng, chiều dương hướng lên, gốc thời gian khi vật ở vị trí thấp nhất. Cho biết khi vật ở vị trí $x_1 = \sqrt{2}$ cm thì vận tốc của nó là $V_1 = 10\sqrt{2}$ (cm/s).

3. Tìm vận tốc lực tác dụng lên trục quay của ròng rọc. Lấy $g = 10m/s^2$.

(ĐH GIAO THÔNG VẬN TẢI – 98)

Giải

1. *Độ dãn của lò xo :*

Đầu A của lò xo đứng yên khi : $f_0 = P$

$$k.\Delta l_0 = mg \quad \Rightarrow \quad \Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{0,2 \times 10}{20} = 0,1\ (m) = 10\ (cm)$$

2. *Phương trình dao động của vật :*

Phương trình dao động : $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ (1)

Với : $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{20}{0,2}} = 10$ (rad/s)

Vận tốc : $V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{V}{\omega} = A\cos(\omega t + \varphi)$ (2)

Bình phương 2 phương trình (1) và (2) rồi cộng, ta được :

$$x^2 + \left(\frac{V}{\omega}\right)^2 = A^2 \qquad (3)$$

Thay $x = x_1 = \sqrt{2}$ (cm) và $V = V_1 = 10\sqrt{2}$ (cm) vào (3) :

$$(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{10\sqrt{2}}{10}\right)^2 = A^2 \qquad \Rightarrow \qquad A = 2\ (\text{cm})$$

Với gốc thời gian là lúc vật ở vị trí thấp nhất tức : $t = 0$, $x = -A = -2c$ phương trình (1) cho : $-2 = 2\sin\varphi$

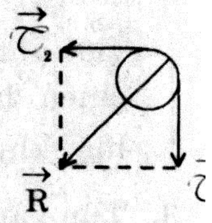
$$\sin\varphi = 1 \quad \rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Vậy : $$x = 2\sin\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)\ (\text{cm}).$$

3. *Vectơ lực tác dụng lên trục quay ròng rọc :*

Vì khối lượng ròng rọc không đáng kể nên nó chịu tác dụng 2 lực că dây $\vec{\mathcal{T}}_1 = \vec{\mathcal{T}}_2$ có độ lớn bằng nhau và thay đổi theo x.

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = mg + ma = mg + mx'' = m(g - \omega^2 x)$$

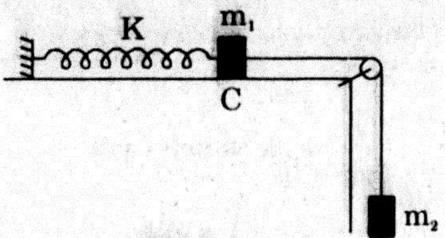


Vectơ lực tác dụng lên R là $\vec{R}$ có :

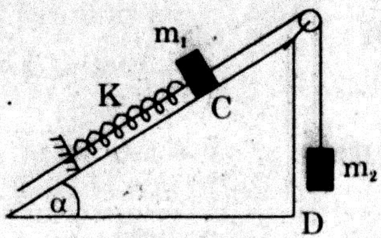
+ Phương : hợp với trục đứng góc 45^0
+ Chiều : hướng xuống
+ Độ lớn : $R = \mathcal{T}_1\sqrt{2} = \sqrt{2}m(g - \omega^2 x) = \sqrt{2}.0,2(10 - 100x) = 2\sqrt{2}(1 - 10x)$;

x tính bằng m.

2.14 **a)** Một lò xo có độ cứng $k = 80N/m$, độ dài tự nhiên $l_0 = 20cm$, một đầ cố định, đầu kia mắc vào vật C khối lượng $m_1 = 600g$ có thể trượt trê mặt phẳng nằm ngang (H.1). Vật C được nối với vật D có khối lượn $m_2 = 200g$ bằng một sợi dây không dãn qua một ròng rọc; sợi dây v ròng rọc đều có khối lượng không đáng kể. Giữ vật D sao cho lò xo c độ dài $l_1 = 21cm$ rồi thả ra nhẹ nhàng. Bỏ qua ma sát và cho gia tố trọng tường bằng $10m/s^2$. Chứng minh rằng hệ dao động điều hòa v viết phương trình dao động của hệ.



Hình 1



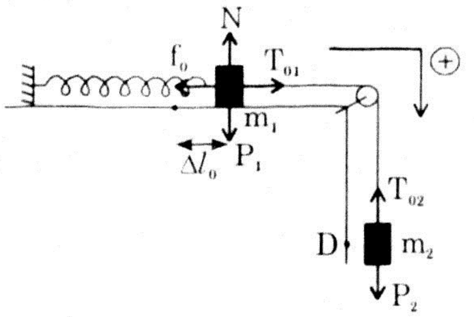
Hình 2

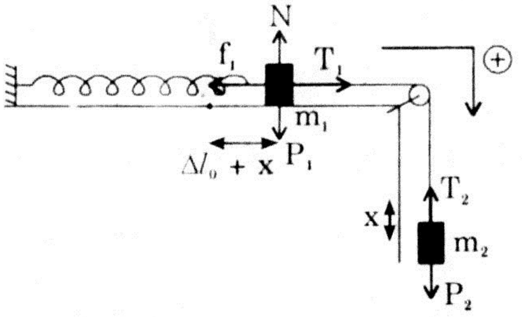
b) Đặt hệ thống lò xo, vật C đã cho trên mặt phẳng nghiêng như (H.2 góc $\alpha = 30^0$. Các điều kiện khác như trong câu a). chứng minh tron trường hợp này hệ vẫn dao động điều hòa, viết phương trình dao động.

(ĐẠI HỌC BÁCH KHOA – HÀ NỘI – 9

Giải

a) *Hệ dao động điều hòa – Phương trình dao động :*





- Lúc hệ cân bằng :

+ Vật m_1 : $\vec{P}_1 + \vec{T}_{01} + \vec{f}_0 + \vec{N} = 0$

Chiếu xuống phương nằm ngang : $0 + T_{01} - k\Delta l_0 + 0 = 0$ (1)

+ Vật m_2 : $\vec{P}_2 + \vec{T}_{02} = 0$

Chiếu xuống phương thẳng đứng : $P_2 - T_{02} = 0$ với $T_{02} = T_{01}$ (2)

Cộng (1) và (2) : $P_2 - k\Delta l_0 = 0$

- Lúc hệ dịch khỏi vị trí cân bằng khoảng x :

+ Hợp lực tác dụng vào m_1 : $\vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{f}_1 + \vec{N} = m_1\vec{a}$

Chiếu xuống phương nằm ngang : $0 + T_1 - k(\Delta l_0 + x) + 0 = m_1 a$ (3)

+ Hợp lực tác dụng vào vật m_2 : $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}$

$\Rightarrow$ $P_2 - T_2 = m_2 a$ với $T_2 = T_1$ (4)

Cộng (3) và (4) ta được : $P_2 - k(\Delta l_0 + x) = (m_1 + m_2)a$

$$\underbrace{P_2 - k\Delta l_0}_{0} - kx = (m_1 + m_2)x''$$

$$x'' = -\frac{k}{m_1 + m_2}x$$

Đặt $\omega^2 = \dfrac{k}{m_1 + m_2}$ thì : $x'' = -\omega^2.x.$

Nghiệm của phương trình : $x = A\sin(\omega t + \varphi)$.

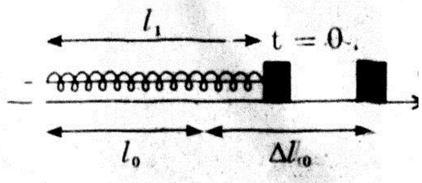
Biểu thức này chứng tỏ hệ dao động điều hòa với tần số góc :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{80}{0,6 + 0,2}} = 10 \text{ (rad/s)}$$

Lúc vật m_1 nằm tại vị trí cân bằng lò xo dãn ra :

$$\Delta l_0 = \frac{P_2}{k} = \frac{0,2 \times 10}{80}$$

$$= 0{,}025 \text{ (m)} = 2{,}5 \text{ (cm)}$$



Chiều dài lò xo lúc hệ cân bằng :

$$l_0 + \Delta l_0 = 20 + 2{,}5 = 22{,}5 \text{ (cm)}$$

Như vậy lúc thả (chọn t = 0) vật cách vị trí cân bằng :

$$|x| = (l_0 + \Delta l_0) - l_1 = 22{,}5 - 21 = 1{,}5 \text{ (cm)}$$

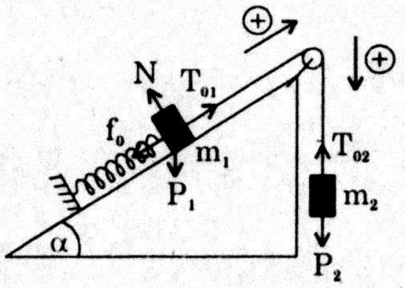
Hay : $x = -1{,}5$ (cm).

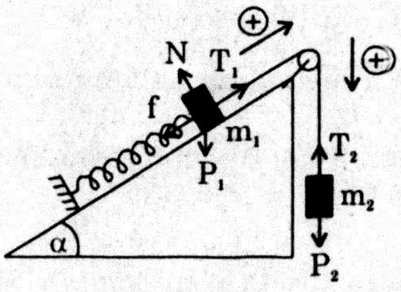
$$\text{Từ} \begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} -1,5 = A\sin\varphi \\ 0 = \omega A\cos\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1,5}{\sin\varphi} > 0 \\ \cos\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1,5 \text{ (cm)} \\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vậy : $x = 1{,}5\sin\left(10t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm).

b) Hệ vật với m_1 trượt trên mặt phẳng nghiêng góc α :





- Lúc hệ vật ở vị trí cân bằng :

Vật m_1 : $\vec{P}_1 + \vec{N} + \vec{f}_0 + T_{01} = 0$

Chiếu xuống phương mặt phẳng nghiêng :

$$-P_1\sin\alpha - k\Delta l_0 + T_{01} = 0 \qquad (5$$

Vật m_2 : $P_2 - T_{02} = 0$ với $T_{02} = T_{01}$ (6

Cộng hai phương trình (5) và (6) ta được : $-P_1\sin\alpha + P_2 - k\Delta l_0 = 0$ (*

- Lúc hệ dịch ra khỏi vị trí cân bằng khoảng x :

Hợp lực tác dụng lên m_1 : $\vec{P}_1 + \vec{N} + \vec{f} + \vec{T}_1 = m_1.x''$

Chiếu xuống phương mặt phẳng nghiêng :

$$-P_1\sin\alpha - k(\Delta l_0 + x) + T_1 = m_1x'' \qquad (7$$

Hợp lực tác dụng lên m_2 : $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2x''$

$$\Rightarrow \quad P_2 - T_2 = m_2x'' \quad \text{với} \quad T_2 = T_1 \qquad (8)$$

Cộng (7) và (8) : $-P_1\sin\alpha + P_2 - k(\Delta l_0 + x) = (m_1 + m_2)x''$

$$\underbrace{-P_1\sin\alpha + P_2 - k\Delta l_0}_{0} - kx = (m_1 + m_2)x''$$

$$\Rightarrow \quad x'' = -\frac{k}{m_1 + m_2}x = -\omega^2 x$$

Với $\omega^2 = \dfrac{k}{m_1 + m_2}$

Nghiệm của phương trình $x'' = -\omega^2 x$ là : $x = A\sin(\omega t + \varphi)$

biểu thức này chứng tỏ vật dao động điều hòa với tần số góc :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 10\ (\text{rad/s})$$

Từ phương trình (*) ta suy ra :

$$\Delta l_0 = \frac{P_2 - P_1\sin\alpha}{k} = \frac{0,2.10 - 0,6.10\frac{1}{2}}{80}$$

$$= -0{,}0125\ (\text{m}) = -1{,}25\ (\text{cm}).$$

Dấu "−" chứng tỏ lò xo đã co lại lúc hệ cân bằng.

Chiều dài lò xo lúc hệ cân bằng : 20 − 1,25 = 18,75 (cm).

Lúc thả vật lò xo dài 21cm tức lúc đó các vật cách vị trí cân bằng về phía dương khoảng 21 − 18,75 = 2,25 (cm).

Chọn t = 0 là lúc vật : x = 2,25cm và V = 0 thì :

$$\text{Từ} \quad \begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} 2{,}25 = A\sin\varphi \\ 0 = \omega A\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2{,}25\text{cm} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vậy : $x = 2{,}25\sin\left(10t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm).

Chương III

HỆ HAI LÒ XO VÀ VẬT NẶNG

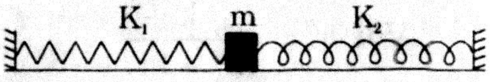
TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Vật dao động giữa hai lò xo

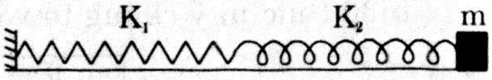
* Độ cứng của lò xo tương đương : $k = k_1 + k_2$

* Chu kì dao động :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$



II. Hai lò xo nối tiếp



* Độ cứng của lò xo tương đương :

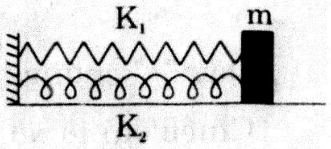
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Leftrightarrow k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$$

* Chu kì : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{m\frac{k_1 + k_2}{k_1k_2}}$

III. Hai lò xo ghép song song

* Độ cứng của lò xo tương đương : $k = k_1 + k_2$

* Chu kì : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$

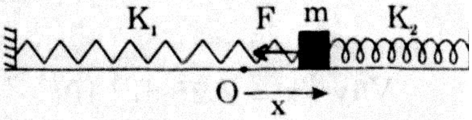


BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1 : VẬT ĐẶT GIỮA HAI LÒ XO

* Khi vật dịch ra khỏi vị trí cân bằng khoảng x thì hợp lực tác dụng vào vật :

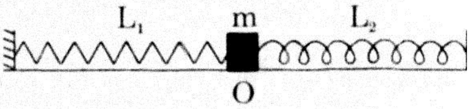
$$F = -(k_1 + k_2)x$$



* Kết hợp với định luật II Niutơn, ta được :

$$x'' = -\omega^2 x \Rightarrow x = A\sin(\omega t + \varphi)$$: vật dao động điều hòa.

Ví dụ : Hai lò xo L_1 và L_2 có độ cứng lần lượt $k_1 = 40N/m$ và $k_2 = 60N/m$ cùng gắn vào vật nặng $m = 1kg$, còn hai đầu kia được giữ cố định.



Vật có thể trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang như hình vẽ. Đưa vật kia ra khỏi vị trí cân bằng O rồi thả, chứng tỏ vật dao động điều hòa và tính chu kì dao động. Xét hai trường hợp :

- Vật ở vị trí cân bằng O 2 lò xo chưa biến dạng.
- Vật ở vị trí cân bằng O 2 lò xo đã bị dãn.

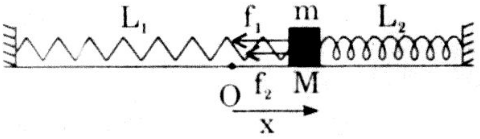
Giải

a) *Vật ở vị trí cân bằng O hai lò xo chưa biến dạng :*

- Sau khi thả, vật qua M ($\overline{OM} = x$), một lò xo bị dãn (ví dụ L_1) và lò xo kia bị nén (ví dụ L_2), lúc đó L_1 tác dụng lên vật lực kéo $\vec{f}_1$, L_2 tác dụng lực đẩy, 2 lực này cùng hướng.

Hợp lực tác dụng vào vật :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$



Trong đó $\vec{P} + \vec{N}$ luôn luôn bằng không nên :

$$\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = -k_1.\overrightarrow{OM} - k_2.\overrightarrow{OM} = -(k_1 + k_2).\overrightarrow{OM}$$

Chiếu xuống phương chuyển động, ta có :

$$F = -(k_1 + k_2).\overline{OM} = -(k_1 + k_2).x \qquad (*)$$

Kết hợp với định luật II Niutơn, ta được :

$$-(k_1 + k_2)x = mx'' \quad \Rightarrow \quad x'' = -\frac{k_1 + k_2}{m}.x$$

$$\text{Đặt} \quad \omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad \text{ta được :} \quad x'' = -\omega^2 x$$

$\Rightarrow$ $x = A\sin(\omega t + \varphi)$: Biểu thức này chứng tỏ vật dao động điều hòa.

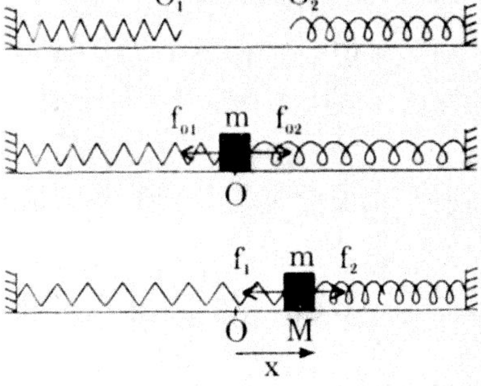
- Chu kì dao động : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{40 + 60}} = 0{,}628$ (s).

b) *Vật ở vị trí cân bằng hai lò xo bị dãn :*

Khi vật ở vị trí cân bằng O cả hai lò xo đều bị kéo dãn từ O_1 đến O và O_2 nên mỗi lò xo xuất hiện một lực kéo. Điều kiện cân bằng cho :

$$\vec{f}_{01} + \vec{f}_{02} = \vec{0}$$

(đã bỏ qua 2 lực $\vec{P}$ và $\vec{N}$).



$$-k_1.\overrightarrow{O_1O} - k_2.\overrightarrow{O_2O} = \vec{0}$$

Đưa vật ra khỏi vị trí cân bằng và thả, sau đó vật sẽ qua vị trí M nào đó với $\overline{OM} = x$ thì hợp lực tác dụng vào vật :

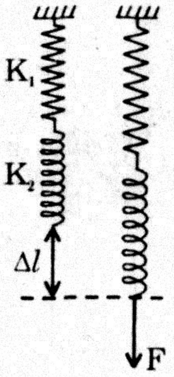
$$\begin{aligned}\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 &= -k_1.\overrightarrow{O_1M} - k_2.\overrightarrow{O_2M}\\ &= -k_1.(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}) - k_2(\overrightarrow{O_2O} + \overrightarrow{OM})\\ &= \underbrace{-k_1.\overrightarrow{O_1O} - k_2.\overrightarrow{O_2O}}_{0} - (k_1 + k_2)\overrightarrow{OM}\end{aligned}$$

Chiếu xuống phương chuyển động, ta được :

$F = -(k_1 + k_2)\overline{OM} = -(k_1 + k_2)x$:   đó chính là biểu thức (*).

Vậy : trong cả hai trường hợp vật đều dao động điều hòa với cùng chu kì $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$.

Dạng 2 : ĐỘ CỨNG CỦA HAI LÒ XO GHÉP NỐI TIẾP



- Dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ mỗi lò xo có độ dãn lần lượt là Δl_1, Δl_2 và độ dãn tổng cộng là : $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$

Với $\begin{cases}\Delta l_1 = \dfrac{F}{k_1}\\ \Delta l_2 = \dfrac{F}{k_2}\end{cases}$ nên $\Delta l = F\left(\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}\right)$ (1)

- Gọi k là độ cứng của lò xo tương đương thì dưới tác dụng lực $\vec{F}$ nó cũng dãn ra Δl, vậy : $\Delta l = \dfrac{F}{k}$ (2)

(1) và (2) cho : $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} \Leftrightarrow k = \dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$.

Ví dụ : Hai lò xo L_1 và L_2 có khối lượng không đáng kể, khi treo một vật có khối lượng là m bằng lò xo L_1 thì nó dao động với chu kì T_1 = 0,3s, khi treo bằng lò xo L_2 thì chu kì T_2 = 0,4s.

Hỏi nếu 2 lò xo nối tiếp với nhau rồi treo vật m trên thì nó sẽ dao động với chu kì bao nhiêu ?

Giải

- Chu kì dao động của vật m khi treo với L_1 :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} \Rightarrow \frac{m}{k_1} = \frac{T_1^2}{4\pi^2}$$

- Chu kì dao động của vật m khi treo với L_2 :

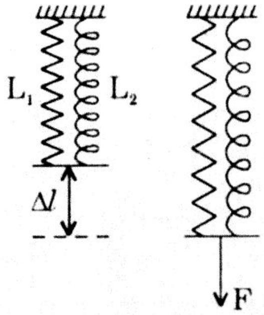
$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} \Rightarrow \frac{m}{k_2} = \frac{T_2^2}{4\pi^2}$$

- Khi 2 lò xo nối tiếp với nhau thì nó tương đương với lò xo có độ cứng k mà : $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ (phải chứng minh)

Chu kì : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1} + \frac{m}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{T_1^2}{4\pi^2} + \frac{T_2^2}{4\pi^2}} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$

$= \sqrt{0,3^2 + 0,4^2} = 0,5$ (s).

Dạng 3 : ĐỘ CỨNG CỦA HAI LÒ XO MẮC SONG SONG



- Dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ 2 lò xo cũng dãn ra Δl.

Lò xo L_1 chịu lực $\vec{F_1}$ và L_2 chịu lực $\vec{F_2}$ mà :

$F = F_1 + F_2$

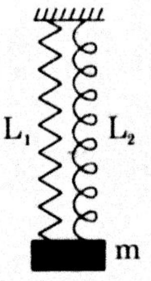
Với $\begin{cases} F_1 = k_1\Delta l \\ F_2 = k_2\Delta l \end{cases}$ nên : $F = (k_1 + k_2)\Delta l$ (1)

- Gọi k là độ cứng của lò xo tương đương với hệ 2 lò xo trên thì với cùng lực $\vec{F}$ nó cũng dãn ra Δl : $F = k.\Delta l$ (2)

(1) và (2) cho : $k = k_1 + k_2$.

Ví dụ : Hai lò xo L_1 và L_2 có cùng độ dài tự nhiên khi treo vật khối lượng m vào đầu lò xo L_1 thì nó dao động với chu kì T_1, khi treo vào L_2 nó dao động với chu kì T_2.

Nối 2 lò xo với nhau bằng cả 2 đầu rồi treo vật m trên như hình vẽ. Chứng minh rằng chu kì dao động T của vật cho bởi : $T = \frac{T_1T_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}$.



Giải

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} \Rightarrow k_1 = \frac{4\pi^2 m}{T_1^2}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} \quad\Rightarrow\quad k_2 = \frac{4\pi^2 m}{T_2^2}$$

Hai lò xo ghép song song tương đương với một lò xo có độ cứng bởi :

$$k = k_1 + k_2 \quad \text{(cần chứng minh !)}$$

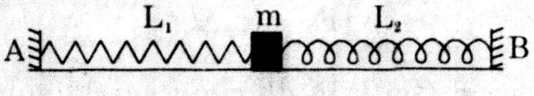
$$= 4\pi^2 m\left(\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}\right) = 4\pi^2 m\,\frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1^2 . T_2^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{k} = \frac{1}{4\pi^2} . \frac{T_1^2 . T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}$$

Chu kì : $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{4\pi^2} . \frac{T_1^2 . T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}} = \frac{T_1 . T_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}} .$$

ĐỀ THI

3.1 Một vật có khối lượng m = 100g chiều dày không đáng kể có thể trượt trên mặt phẳng nằm ngang. Vật được nối vào 2 giá cố định A và B qua 2 lò xo : L_1 có độ cứng k_1 = 60N/m và L_2 có độ cứng k_2 = 40N/m. Người ta kéo vật đến vị trí sao cho L_1 bị dãn một đoạn Δl = 20cm thì thấy L_2 không bị dãn, không bị nén rồi thả nhẹ cho vật chuyển động không có vận tốc ban đầu. Bỏ qua mọi ma sát và khối lượng của lò xo. Chọn gốc tọa độ tại vị trí cân bằng, chiều dương của trục tọa độ hướng từ A sang B, thời điểm ban đầu là lúc thả vật.



a) Chứng minh vật dao động điều hòa.

b) Viết phương trình dao động, tính chu kì dao động T và năng lượng dao động E của vật. Cho rằng $\pi^2 \approx 10$.

c) Vẽ và tính cường độ các lực do các lò xo tác dụng lên các giá cố định A và B tại thời điểm $t = \frac{T}{2}$.

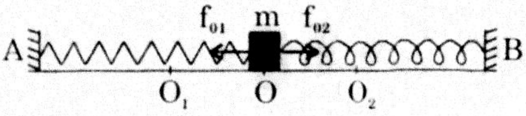
(ĐHQG HÀ NỘI – 7/95)

Giải

***a)** Chứng minh vật dao động điều hòa :*

- Theo đề, ở vị trí cân bằng O, 2 lò xo đã bị kéo dãn.

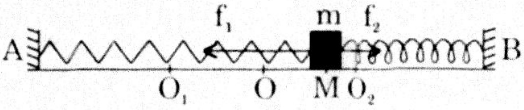
Điều kiện cân bằng của vật : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_{01} + \vec{f}_{02} = \vec{0}$



Trong đó : $\vec{P} + \vec{N} = 0$

$\vec{f}_{01} = -k_1 . \overrightarrow{O_1O}$

$\vec{f}_{02} = -k_2 . \overrightarrow{O_2O}$



(O_1, O_2 là 2 đầu của 2 lò xo khi không nối với vật m)

Vậy : $-k_1.\overrightarrow{O_1O} - k_2.\overrightarrow{O_2O} = \vec{0}$ (*)

- Sau khi thả vật chuyển động và lúc qua M ($\overline{OM} = x$) thì hợp lực tác dụng vào vật :

$$\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = -k_1.\overrightarrow{O_1M} - k_2.\overrightarrow{O_2M} = -k_1(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}) - k_2$$

$$= \underbrace{-k_1.\overrightarrow{O_1O} - k_2.\overrightarrow{O_2O}}_{0} - (k_1 + k_2)\overrightarrow{OM} = -(k_1 + k_2)\overrightarrow{OM}$$

Chiếu xuống trục AB : $F = -(k_1 + k_2)\overline{OM} = -(k_1 + k_2).x$

Kết hợp với định luật II Niutơn : $mx'' = -(k_1 + k_2).x$

$$\Rightarrow \quad x'' = -\frac{k_1 + k_2}{m}.x$$

Đặt : $\omega^2 = \dfrac{k_1 + k_2}{m} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$ thì : $x'' = -\omega^2.x$

$\Rightarrow$ $x = A\sin(\omega t + \varphi)$: biểu thức này chứng tỏ vật dao động điều hòa.

b) *Phương trình dao động – Chu kì – Năng lượng :*

+ $$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0,1}} = 10\pi \text{ (rad/s)}$$

+ Từ biểu thức (*) ta suy ra : $\overrightarrow{O_1O} = -\dfrac{k_2}{k_1}\overrightarrow{O_2O}$

hay : $O_1O = \dfrac{k_2}{k_1}O_2O = \dfrac{40}{60}O_2O = \dfrac{2}{3}O_2O$

mà : $O_1O + O_2O = \Delta l \Rightarrow \dfrac{2}{3}O_2O + O_2O = 20$ (cm) $\Rightarrow O_2O = 12$ (cm)

Theo đề, ta có điều kiện đầu như sau : $t = 0$, $x = \overline{OO_2} = 12$cm, $V = 0$,

do đó : $\begin{cases} 12 = A\sin\varphi \\ V = \omega A\cos\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos\varphi = 0$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \quad \text{và} \quad A = \frac{12}{\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)}$$

Vì $A > 0$ nên $A = 12$cm và $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Vậy : $x = 12\sin\left(10\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm).

- Chu kì : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0,2$ (s).
- Năng lượng E của dao động bằng động năng cực đại của vật :

$$E = \frac{1}{2}mV_{max}^2 \qquad \text{với } V_{max} = \omega A$$

$$= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \frac{1}{2}.0,1(10\pi \times 12.10^{-2})^2 = 0,72\ (J)$$

c) *Cường độ các lực tác dụng lên các giá :*

Lúc $t = \frac{T}{2}$ vật thực hiện được nửa dao động tức ở tại điểm đối xứng với O_2 qua O (lúc thả vật ở O_2) tức cách O 12cm về phía A. Ta biết :

$$OO_1 = O_1O_2 - OO_2 = 20 - 12 = 8cm.$$

Như vậy lúc $t = \frac{T}{2}$ lò xo L_1 đã bị co lại $\Delta l_1 = 12 - 8 = 4cm$ và lò xo L_2 bị dãn ra tam bị dãn ra $\Delta l_2 = 24cm$.

Do đó : lực tác dụng lên giá cố định ở A có :

+ Hướng : từ B → A (do L_1 bị co)

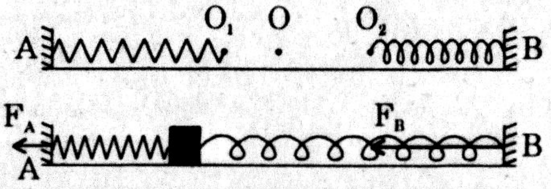
+ Cường độ : $F_A = k_1\Delta l_1 = 60.0,4 = 2,4$ (N)

Lực tác dụng lên giá cố định ở B có :

+ Hướng : từ B → A (do L_2 bị dãn)

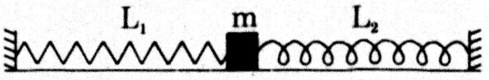
+ Cường độ : $F_B = k_2\Delta l_2 = 40 \times 0,24 = 9,6$ (N)

Các lực được vẽ như sau :



3.2 **1.** Vật M có khối lượng m = 2kg được nối qua hai lò xo L_1 và L_2 vào hai điểm cố định (H.1) có thể trượt trên mặt phẳng ngang. Vật M đang ở vị trí cân bằng : tách vật ra khỏi vị trí đó 10cm rồi thả ra không vận tốc đầu cho dao động.

Chu kì dao động là $T = 2,094 \approx \frac{2\pi}{3}$ s.



Hình 1

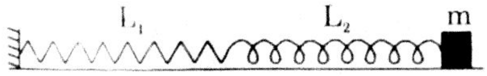
a) Viết biểu thức độ dời x của M theo t.

Chọn gốc thời gian là lúc M ở vị trí cân bằng 10cm.

b) Viết biểu thức động năng và thế năng của M theo t.

Tính giá trị của chúng tại thời điểm O, $\frac{T}{6}, \frac{T}{4}, \frac{T}{3}, \frac{T}{2}$ nghiệm lại rằng tổng của động năng và thế năng không đổi.

2. Vật M được nối với 2 lò xo theo một cách khác (H.2), khi đó chu kì dao động của M là $T' = \frac{3}{\sqrt{2}}T$.



Hình 2

Tìm các độ cứng của lò xo L_1 và L_2.

Bỏ qua ma sát và khối lượng lò xo.

(ĐH BÁCH KHOA & ĐH TỔNG HỢP – 1980)

Giải

1.a) *Biểu thức độ dời x theo t :*

Biểu thức độ dời x của vật m có dạng : $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ (1)

(Cách chứng minh như bài 3.1)

Trong đó : + $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$ (Rad/s)

+ Biên độ A = 10cm

+ t = 0, x = 10cm nên phương trình (1) cho :

$$10 = 10\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy : $x = 10\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ (cm).

b) *Biểu thức động năng và thế năng của M :*

- Động năng : $E_đ = \frac{1}{2}mv^2$

với : $V = x' = 0{,}3\cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ (m/s) nên :

$$E_đ = \frac{1}{2}.2.\left[0{,}3\cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = 0{,}09\cos^2\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (J)}$$

- Thế năng : $E_t = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2$

Với : $\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \quad \Rightarrow \quad k_1 + k_2 = m\omega^2 = 2.3^2 = 18$ (N/m) (1) nên : $E_t = \frac{1}{2}\times 18\left[0,1\sin\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = 0,09\sin^2\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$ (J)

Tổng động năng và thế năng (cơ năng) :

$E = E_đ + E_t = 0,09\left[\cos^2\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0,09$ (J) : không đổi

2. *Độ cứng của hai lò xo :*

+ Theo đề : $T' = \frac{3}{\sqrt{2}}T = \frac{3}{\sqrt{2}}.\frac{2\pi}{3} = \sqrt{2}\pi$ (s).

+ Gọi k' là độ cứng của lò xo tương đương với 2 lò xo ghép nối tiếp t

chu kì : $T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} \Rightarrow k' = \frac{4\pi^2 m}{T'^2} = \frac{4\pi^2.2}{(\pi\sqrt{2})^2} = 4$ (N/m).

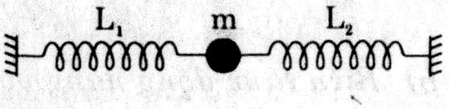
+ Độ cứng của 2 lò xo ghép nối tiếp : $k' = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$ (chứng minh ở loại 2)

$\Rightarrow k_1k_2 = k'(k_1+k_2) = 4\times 18 = 72\ (N/m)^2$ (2

k_1 và k_2 là nghiệm của phương trình : $k^2 - 18k + 72 = 0$ (do (1) và (2))

$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 12\ (N/m) \\ k_2 = 6\ (N/m) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k_1 = 6\ (N/m) \\ k_2 = 12\ (N/m) \end{cases}$

3.3 Hai lò xo L_1 và L_2 có độ cứng lần lượt là k_1 và k_2 được móc vào m quả cầu khối lượng m = 50g (xem hình). Cho biết $\frac{k_1}{k_2} = \frac{3}{2}$ và hai lò x đầu ở trạng thái tự nhiên.



Nếu dùng 1 lực 5N thì có thể đẩy quả cầu theo phương ngang đi 1 đoạn 1cm.

Tính độ cứng k_1 và k_2 của các lò xo. Thả nhẹ cho quả cầu dao độn điều hòa, tính chu kì dao động. Bỏ qua ma sát.

(ĐHQG – TP.HCM – 7/9

Giải

+ Theo đề : $\frac{k_1}{k_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow k_1 = \frac{3}{2}k_2$ (1

+ Khi quả cầu dịch khỏi vị trí cân bằng khoảng Δl = 1cm thì 1 lò xo dãn và lò xo kia bị cong cùng khoảng Δl nên 2 lò xo cùng tác dụng và vật 2 lực $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ cùng chiều. Hợp 2 lực này cân bằng với ngoại lự F = 5N, nên :

$$F = f_1 + f_2 = k_1\Delta l + k_2\Delta l \quad \Rightarrow \quad k_1 + k_2 = \frac{5N}{0,01m} = 500\ (N/m) \qquad (2)$$

(1) và (2) cho : $2,5k_2 = 500$ và $k_2 = 200\ (N/m)$; $k_1 = 300\ (N/m)$.

4 Hai lò xo giống hệ nhau có khối lượng không đáng kể, mỗi lò xo có chiều dài tự nhiên bằng 20cm và có độ cứng bằng 175N/m.

a) Treo một quả nặng Q có kích thước không đáng kể vào một lò xo theo phương thẳng đứng, đầu trên giữ cố định. Xác định khối lượng của quả nặng Q để chu kì của nó bằng 0,3s. Viết phương trình dao động của quả nặng biết vận tốc cực đại của quả nặng bằng 21cm/s và ở thời điểm ban đầu nó ở vị trí cân bằng.

b) Nối hai lò xo đã cho liên tiếp rồi treo quả nặng Q như trong câu a) vào và cho dao động tự do. Xác định chu kì của dao động, nếu cơ năng của vật Q trong trường hợp này bằng cơ năng của nó trong trường hợp a) thì khoảng cách cực đại và cực tiểu từ quả nặng Q tới điểm treo lò xo bằng bao nhiêu ?

Trong mọi trường hợp bỏ qua các mạ sát và coi gia tốc trọng trường $g = 9,8\ m/s^2$.

(ĐH BÁCH KHOA HÀ NỘI – 7/96)

Giải

***a)** Khối lượng quả nặng – Phương trình dao động :*

+ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{T^2.k}{4\pi^2} = \dfrac{0,3^2.175}{4\pi^2} = 0,399 \approx 0,4\ (kg).$

+ Chọn gốc tọa độ là vị trí cân bằng O thì : $x = A\sin(\omega t + \varphi)$

Với : • $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0,3} = \dfrac{20\pi}{3}$ (rad/s)

• $V_{max} = \omega A \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{V_{max}}{\omega} = \dfrac{21}{\frac{20\pi}{3}} \approx 1$ (cm)

• Chọn t = 0 lúc vật qua vị trí cân bằng theo chiều dương :

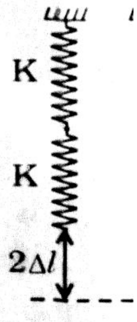
$$x = 0,\ V > 0. \quad \text{Ta có} \begin{cases} 0 = A\sin\varphi \\ V = \omega A\cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = 0$$

Vậy : $x = 1.\sin\dfrac{20\pi}{3}t$ (cm).

***b)** Xét hệ hai lò xo giống nhau ghép nối tiếp :*

• Đặt lực $\vec{F}$ vào đầu dưới của hệ 2 ghép thì mỗi lò xo dãn ra Δl với : $\Delta l = \dfrac{F}{k}$

Độ dãn chung của hai lò xo : $2\Delta l = \dfrac{2F}{k}$ (1)



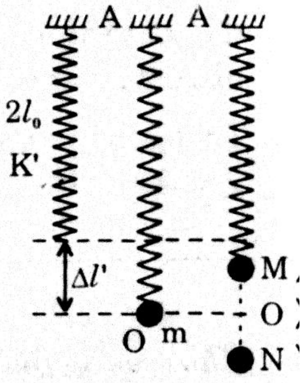
- Gọi k' là độ cứng của lò xo tương đương với 2 lò xo trên thì dưới cùng lực $\vec{F}$ nó cũng dãn ra $2\Delta l$.

$$\text{Vậy : } \quad 2\Delta l = \frac{F}{k'} \qquad (2)$$

(1) và (2) cho : $\dfrac{1}{k'} = \dfrac{2}{k} \Rightarrow k' = \dfrac{k}{2} = 87{,}5$ (N/m).

- Chu kì : $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k'}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}} = T\sqrt{2} = 0{,}3\sqrt{2} \approx 0{,}4242$ (s).

- *Khoảng cách cực đại và cực tiểu từ điểm treo A đến vật Q :*



+ Cơ năng không đổi nên : $\dfrac{1}{2}k'A'^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$

$\Rightarrow \quad A' = A\sqrt{2} = \sqrt{2} = 1{,}414$ (cm)

+ Độ dãn của hệ 2 lò xo :

$$\Delta l' = \frac{mg}{k'} = \frac{0{,}4 \times 9{,}8}{87{,}5} = 0{,}0488 \text{ (m)}$$

$= 4{,}48$ (cm).

+ Chiều dài cực đại :

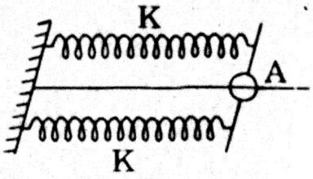
$$l_{max} = AN = 2\Delta l_0 + \Delta l' + A' = 40 + 4{,}48 + 1{,}414 = 45{,}894 \text{ (cm)}$$

+ Chiều dài cực tiểu :

$$l_{min} = AM = 2\Delta l_0 + \Delta l' - A' = 40 + 4{,}48 - 1{,}414 = 43{,}066 \text{ (cm)}$$

3.5 Một con lắc lò xo như hình vẽ. Trong đó hai lò xo giống hệt nhau khối lượng không đáng kể, độ cứng mỗi lò xo là k = 2,5N/m. Vật A một quả cầu khối lượng m = 600g có thể trượt không ma sát theo trục xuyên tâm nằm ngang. Người ta kéo vật A ra khỏi vị trí cân bằ một đoạn x_0 = 10cm theo phương trục. Tính biên độ, tần số góc và p ban đầu, từ đó viết phương trình dao động của vật A trong hai trườ hợp.

a) Bỏ vật ra không vận tốc đầu.



b) Bỏ vật ra và đẩy cho vật có vận tốc ban đầu V_0 = 0,5m/s hướng về vị trí cân bằng.

Bỏ qua ma sát.

(ĐH THỦY LỢI – 7/

Giải

Khi vật dịch ra khỏi vị trí cân bằng một khoảng x thì 2 lò x cùng dãn hoặc cùng co một khoảng x nên chúng xuất hiện 2 lực đàn hồi cùng hướng tác dụng lên vật A, mỗi lực có giá trị $-kx$, do đó hợp lực tác dụng lên vật A là : $f = -2kx$.

Kết hợp định luật II Niutơn : $-2kx = mx''$ $\Rightarrow$ $x'' = -\dfrac{2k}{m}.x = -\omega^2 x$

với $\omega^2 = \dfrac{2k}{m}$ $\Rightarrow$ $x = A\sin(\omega t + \varphi)$

Với $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}} = \sqrt{\dfrac{2.2,5}{0,6}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$ (rad/s)

Chọn : t = 0 là lúc bỏ vật ra và chiều dương là chiều kéo.

a) *Bỏ vật không vận tốc đầu :* $t = 0$, $x = x_0 = 10\text{cm}$, $V = 0$

$$\text{Từ } \begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \xrightarrow{\text{lúc } t=0} \begin{cases} 10 = A\sin\varphi & (1) \\ 0 = \omega A\cos\varphi & (2) \end{cases}$$

$(2) \rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $(1) \rightarrow A = \dfrac{10}{\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)} = \pm 10$

Chỉ nhận A > 0 tức A = 10cm ứng với $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

Vậy : $x = 10\sin\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm).

b) *Bỏ vật ra và đẩy vật :* $t = 0$, $x = +10\text{cm}$, $V = -V_0 = -0,5\text{m/s} = -50\text{cm/s}$

$$\begin{cases} 10 = A\sin\varphi \\ -50 = \dfrac{5}{\sqrt{3}}A\cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\sin\varphi = 10 \\ A\cos\varphi = -10\sqrt{3} \end{cases} \qquad (3)$$

Chia 2 phương trình vế theo vế : $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ $\varphi = \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{7\pi}{6} \end{array}\right.$

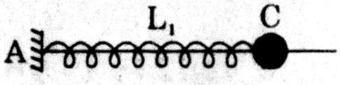
Với $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$: $A = \dfrac{10}{\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)} = -20\text{cm} < 0$: loại

Với $\varphi = \dfrac{7\pi}{6}$: $A = \dfrac{10}{\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)} = 20\text{cm}$

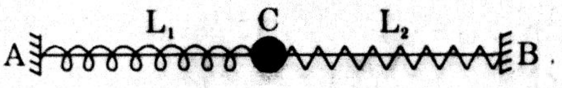
Vậy : $x = 20\sin\left(\frac{5}{\sqrt{3}}t + \frac{7\pi}{6}\right)$ (cm).

3.6 Một quả cầu C có kích thước không đáng kể, khối lượng m = 250g đư mắc vào đầu một lò xo L_1 có khối lượng không đáng kể, độ cứ k_1 = 25N/m sao cho nó có thể trượt dọc theo một thanh kim loại má nằm ngang. Đầu kia của lò xo được giữ cố định ở điểm A (H.1). Coi sát và lực cản của không khí là không đáng kể.

a) Kéo quả cầu ra khỏi vị trí cân bằng và thả cho nó dao động không vận tốc đầu. Chứng minh rằng quả cầu dao động điều hòa, xác đị chu kì của dao động này.



Hình 1



Hình 2

b) Nối quả cầu trên với một đầu của lò xo L_2 có khối lượng không đá kể, có độ cứng k_2 = 75N/m. Đầu còn lại của lò xo L_2 được giữ cố định điểm B sao cho tổng độ dãn của cả 2 lò xo L_1 và L_2 bằng 4cm (H. Kéo quả cầu về phía điểm B tới vị trí mà lò xo L_2 có độ dài bằng dài tự nhiên của nó rồi thả cho quả cầu dao động. Chứng minh rằng hệ dao động điều hòa và thiết lập phương trình dao động của quả cầ Chọn thời điểm ban đầu và lúc cơ hệ bắt đầu dao động.

(ĐH BÁCH KHOA HÀ NỘI - 7/9

Giải vắn tắt

a) *Chứng minh quả cầu dao động điều hòa – Chu kì :*

- $F = -kx = mx'' \Rightarrow x'' = -\omega^2 x$ với $\omega^2 = \frac{k_1}{m}$

  $\Rightarrow x = A\sin(\omega t + \varphi)$: kết luận vật dao động điều hòa

- Chu kì : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0{,}63$ (s).

b) *Chứng minh cơ hệ dao động điều hòa – Phương trình dao động :*

- $F = -(k_1 + k_2)x = mx'' \Rightarrow x = -\omega^2 x$ với $\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$

$\Rightarrow$ $x = A\sin(\omega t + \varphi)$: kết luận cơ hệ dao động điều hòa.

Với : + $\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = 20$ (rad/s)

+ Lúc vật ở vị trí cân bằng O : $k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2$

$25\Delta l_1 = 75\Delta l_2 \Rightarrow \Delta l_1 = 3\Delta l_2$

Và : $\Delta l_1 + \Delta l_2 = 4$cm

(1) và (2) suy ra : $\Delta l_2 = 1$ (cm)

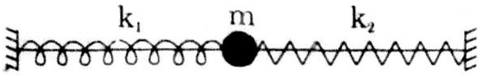
Chọn chiều dương từ A → B thì : t = 0, $x = \Delta l_2 = 1\text{cm}$, $V = 0$.

Ta có $\begin{cases} 1 = A\sin\varphi \\ V = \omega A\cos\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ A = 1\text{cm} \end{cases}$

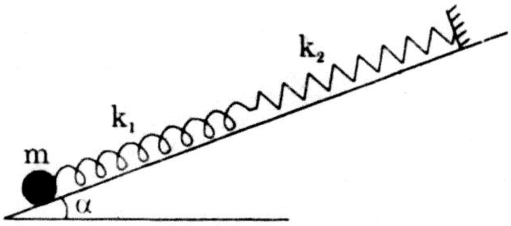
Vậy : $x = 1\sin\left(20t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm).

.7 **1.** Một vật kích thước nhỏ có khối lượng m = 1kg gắn vào 2 lò xo có độ cứng k_1 và k_2, vật dao động điều hòa với chu kì $T_1 = 2$s. Ở điều kiện ban đầu vật có li độ +2cm theo chiều dương quy ước so với vị trí cân bằng và có vận tốc 6,28cm/s hướng về vị trí cân bằng. Viết phương trình dao động của vật (H.1).

2. Hệ dao động lại được bố trí như (H.2), vật cũng dao động điều hòa với chu kì $T_2 = 5$s.



Hình 1



Hình 2

a) Tính độ cứng k_1, k_2 của 2 lò xo.

b) Tính góc lệch α của mặt phẳng nghiêng, biết rằng độ dãn của lò xo khi vật ở vị trí cân bằng là 6,25cm so với độ dài tự nhiên của chúng. Coi ma sát không đáng kể lấy $g = \pi^2 = 10\text{m/s}^2$.

(ĐH NGOẠI THƯƠNG HÀ NỘI – 7/97)

Giải

1. *(H1) Phương trình dao động :* (*) $\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$

Với : + $\omega = \dfrac{2\pi}{T_1} = \pi$ (rad/s)

+ t = 0, x = +2cm, V = –6,28cm/s

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} +2 = A\sin\varphi \\ -6,28 = \pi A\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2\sqrt{2}\ (\text{cm}) \\ \varphi = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Vậy : $x = 2\sqrt{2}\sin\left(\pi t + \dfrac{3\pi}{4}\right)$ (cm).

2.a) ***k_1 và k_2 :***

$$(H1) \rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \quad \Rightarrow \quad k_1 + k_2 = \frac{4\pi^2.m}{T_1^2} = 10\ (N/m)$$

$$(H2) \rightarrow T_2 = 2\pi\sqrt{m\frac{k_1 + k_2}{k_1k_2}} \quad \Rightarrow \quad k_1k_2 = \frac{4\pi^2 m(k_1 + k_2)}{T_2^2} = 16\ (N/n$$

k_1 và k_2 là nghiệm của phương trình : $k^2 - 10k + 16 = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 8\ (N/m) \\ k_2 = 2\ (N/m) \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} k_1 = 2\ (N/m) \\ k_2 = 8\ (N/m) \end{cases}$$

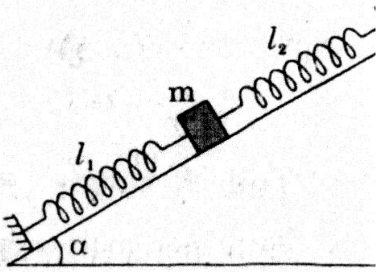
b) *Góc α :*

+ (H2) → $k' = \dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2} = 1,6\ (N/m)$

+ Lúc vật cân bằng : $k'.\Delta l = mg\sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = 0,01 \Rightarrow \alpha \approx 0,01$

3.8 Cho một lò xo có độ dài l_0 = 45cm, độ cứng k_0 = 12N/m được cắt th hai lò xo l_1 = 18cm và l_2 = 27cm.

Mắc hai lò xo l_1 và l_2 vào vật nặng m = 100g (Hình vẽ). Tại thời điểm ban đầu giữ cho hai lò xo không bị biến dạng. Thả tay cho vật dao động, cho rằng vật dao động theo đường thẳng nằm xiên trên mặt phẳng nghiêng một góc α. Bỏ qua ma sát, cho α = 30^0, g = 9,8m/s^2.



1. Thành lập phương trình chuyển động của vật.
2. Tính chu kì dao động của vật.

(HỌC VIỆN QUÂN Y - 7

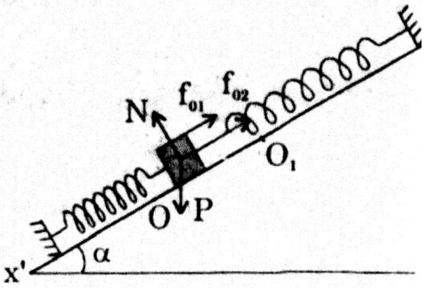
Giải

1. *Phương trình chuyển động của vật :*

- Độ cứng của 2 phần l_1 và l_2 tỉ lệ nghịch với chiều dài của nó :

$$k_1 = \frac{l_0}{l_1}.k_0 = 30\ (N/m)$$

$$k_2 = \frac{l_0}{l_2}.k_0 = 20\ (N/m)$$



- Gọi O_1 là vị trí thả vật, tại đó 2 lò xo chưa biến dạng.

Tại vị trí cân bằng O, ta có : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_{01} + \vec{f}_{02} = \vec{0}$

Trong đó $\vec{f}_{01}$ và $\vec{f}_{02}$ là 2 lực đàn hồi do 2 lò xo bị biến dạng từ $O_1 \to O$:

$\vec{f}_{01} = -k_1 . \overrightarrow{O_1O}$; $\vec{f}_{02} = -k_2 . \overrightarrow{O_1O}$

$$\text{nên :}\quad \vec{P} + \vec{N} - k_1 . \overrightarrow{O_1O} - k_2 . \overrightarrow{O_1O} = \vec{0} \qquad (1)$$

Sau khi thả vật dịch đến M nào đó (với $\overline{OM} = x$) thì hợp lực tác dụng vào vật là : $\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_1 + \vec{f}_2$

$$\text{với :}\quad \begin{cases} \vec{f}_1 = -k_1 . \overrightarrow{O_1M} = -k_1(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}) \\ \vec{f}_2 = -k_2 . \overrightarrow{O_1M} = -k_2(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}) \end{cases}$$

$$\text{nên :}\quad \vec{F} = \vec{P} + \vec{N} - k_1(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}) - k_2(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM})$$

$$= \underbrace{\vec{P} + \vec{N} - k_1 . \overrightarrow{O_1O} - k_2 . \overrightarrow{O_1O}}_{\vec{0}} - (k_1 + k_2).\overrightarrow{OM} = -(k_1 + k_2).\overrightarrow{OM}$$

Chiếu xuống trục x'x : $F = -(k_1 + k_2)\overline{OM} = -(k_1 + k_2)x$.

Kết hợp định luật II Niutơn : $F = -(k_1 + k_2)x = mx''$

$$x'' = -\frac{k_1 + k_2}{m} . x = -\omega^2 x \qquad \text{với } \omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \quad \Rightarrow \quad x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

- *Xác định ω, A và φ :*

$$+ \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{50}{0,1}} = 10\sqrt{5} \text{ (rad/s)}$$

+ Li độ của vị trí thả là $x = \overline{OO_1}$

Chiếu (1) xuống trục x'x (chiều dương chọn hướng lên) :

$$a - mg\sin\alpha + 0 - (k_1 + k_2).\overline{O_1O} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{O_1O} = -\frac{mg\sin\alpha}{k_1 + k_2}$$

$$\text{hay :}\quad x = \overline{OO_1} = \frac{0,1 \times 9,8 \times \frac{1}{2}}{50} = 0,0098 \text{ (m)} = 0,98 \text{ (cm)}.$$

Chọn t = 0 là lúc thả : x = 0,98cm và V = 0

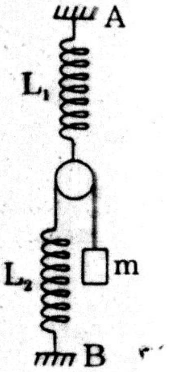
$$\text{Từ}\quad \begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi) \\ V = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} 0,98 = A\sin\varphi \\ 0 = \omega A\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0,98 \text{(cm)} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } x = 0,98\sin\left(10\sqrt{5}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (cm)}.$$

2. *Chu kì dao động của vật :* $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{10\sqrt{5}} \approx 0,28$ (s).

3.9 Cho một lò xo cấu tạo đồng đều, khối lượng không đáng kể, có chiề dài tự nhiên $l_0 = 45$cm, hệ số đàn hồi $k_0 = 200$N/m. Cắt lò xo thàn hai lò xo L_1, L_2 có chiều dài và hệ số đàn hồi tương ứng l_1, k_1 và l_2, k với $l_2 = 2l_1$

1. Chứng minh rằng : $\dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{l_2}{l_1}$. Tính k_1, k_2.



2. Bố trí hệ cơ học như hình vẽ. Bỏ qua mọi sức cản, hệ sẽ dao động theo phương thẳng đứng, các điểm A, B của lò xo được gắn cố định, các dây nối không co dãn, khối lượng của ròng rọc và các dây nối bỏ qua. Kéo vật m xuống dưới theo phương thẳng đứng khỏi vị trí cân bằng với li độ nhỏ $x = a = 2$cm rồi thả ra không vận tốc ban đầu.

- Chứng minh vật m dao động điều hòa.
- Viết phương trình dao động, biết chu kì dao động của vật T = 1s.

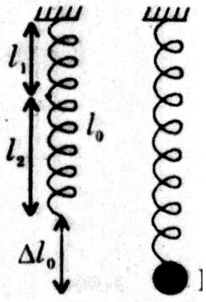
Chọn gốc thời gian là lúc bắt đầu thả vật, chiều dương của chuyể động hướng xuống.

3. Tính lực tác dụng cực đại của hệ lên điểm A và lực tác dụng cực tiể của hệ lên điểm B. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$; $\pi^2 = 10$.

(ĐH XÂY DỰNG – 199

Giải

1. Chứng minh rằng : $\dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{l_2}{l_1}$ *và giá trị* $k_1 - k_2$ *:*



- Treo vào lò xo có chiều dài l_0 một vật có trọng lượng là P thì cả lò xo dãn ra Δl_0. Vì lò xo có cấu tạo đồng đều nên mỗi đơn vị độ dài đã dãn : $\dfrac{\Delta l_0}{l_0}$

với chiều dài l_1 lò xo dãn : $\Delta l_1 = l_1.\dfrac{\Delta l_0}{l_0}$

Mặt khác phần lò xo này cũng chịu trọng lượng là P, vậy độ cứng củ phần lò xo này là : $k_1 = \dfrac{P}{\Delta l_1}$

Tương tự với chiều dài l_2 còn lại dãn $\Delta l_2 = l_2.\dfrac{\Delta l_0}{l_0}$ và có độ cứng : $k_2 = \dfrac{P}{\Delta l_2}$

Lập tỉ số : $\frac{k_1}{k_2} = \frac{\Delta l_2}{l_1} = \frac{l_2 \frac{\Delta l_0}{l_0}}{l_1 \frac{\Delta l_0}{l_0}} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{l_2}{l_1}$ (*)

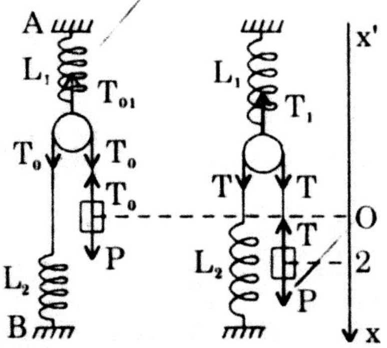
- Có $\begin{cases} l_1 + l_2 = 45\text{cm} \\ l_2 = 2l_1 \end{cases} \Rightarrow$ $l_1 = 15$cm và $l_2 = 30$cm

Biểu thức (*) ta thay k_2 bởi k_0 thì l_2 bởi l_0, lúc đó :

$$\frac{k_1}{k_0} = \frac{l_0}{l_1} \Rightarrow k_1 = \frac{l_0}{l_1} \times k_0 = \frac{45}{15}.200 = 600\ (\text{N/m})$$

$$\text{Và} \quad (*) \Rightarrow k_2 = k_1.\frac{l_1}{l_2} = 600.\frac{15}{30} = 300\ (\text{N/m}).$$

2. a) *Chứng minh vật dao động điều hòa :*



- Lúc hệ cân bằng, lò xo L_1 dãn ra Δl_{01}, L_2 dãn Δl_{02}, ta có :

$$T_{01} = 2T_0$$

$$k_1\Delta l_{01} = 2k_2\Delta l_{02} \qquad (1)$$

Và lúc đó : $P - T_0 = 0$

$$P - k_2\Delta l_{02} = 0 \qquad (2)$$

- Lúc vật dịch khỏi vị trí cân bằng khoảng x (xuống dưới chẳng hạn) thì L_1 dãn thêm x_1, L_2 dãn thêm x_2

Lúc L_1 dãn thêm x_1 thì vật m dịch $2x_1$, còn L_2 dãn x_2 làm m dịch thêm x_2. Vậy m đã dịch : $x = 2x_1 + x_2$ (3)

Mặt khác : $T_1 = 2T$

$$k_1(\Delta l_{01} + x_1) = 2k_2(\Delta l_{02} + x_2)$$

$$k_1\Delta l_{01} + k_1x_1 = 2k_2\Delta l_{02} + 2k_2x_2$$

Kết hợp với (1) ta được : $k_1x_1 = 2k_2x_2$ (4)

$$\Rightarrow x_1 = 2\frac{k_2}{k_1}x_2 \quad \text{Thay vào (3) :}$$

$$x = \left(\frac{4k_2}{k_1} + 1\right)x_2 = \frac{4k_2 + k_1}{k_1}x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{k_1}{k_1 + 4k_2}x \qquad (5)$$

- Hợp lực tác dụng vào vật m lúc vật có li độ x :

$$F = P - T = P - k_2(\Delta l_{02} + x_2) = \underbrace{P - k_2\Delta l_{02}}_{0\ (\text{do }(2))} - k_2x_2 = -k_2x_2 = -\frac{k_1k_2}{k_1 + 4k_2}x$$

- Định luật II Niutơn : $-\frac{k_1k_2}{k_1 + 4k_2}x = mx'' \Rightarrow x'' = -\frac{k_1k_2}{m(k_1 + 4k_2)}x$

$$x'' = -\omega^2 x \quad \text{với} \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+4k_2)}}$$

Nghiệm của phương trình : $x = A\sin(\omega t + \varphi)$

Biểu thức này chứng tỏ vật m dao **động điều hòa**.

b) Phương trình dao động :

- $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ (rad/s)}$$
- Lúc t = 0 thì x = 2cm và V = 0 nên : $\begin{cases} 2 = A\sin\varphi \\ 0 = \omega A\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2\text{cm} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Vậy : $x = 2\sin\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm).

3. *Lực cực đại tác dụng lên điểm A và* ***cực tiểu lên điểm B :***

$$T = \sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+4k_2)}} \Rightarrow m = \frac{k_1k_2}{\omega^2(k_1+4k_2)} = \frac{600.300}{(2\pi)^2(600+4.300)} = 2{,}5 \text{ (kg)}$$

- Lực cực đại tác dụng lên điểm A **chính là lực đàn hồi** cực đại của L_1 :

$$T_{1(max)} = k_1(\Delta l_{01} + x_{1max})$$

Với $k_1\Delta l_{01} = 2k_2\Delta l_{02} = 2P = 2mg$ **(do (1) và (2))**

$$= 2.2{,}5.10 = 50 \text{ (N)}$$

Và do (4), (5), ta có : $k_1x_1 = 2k_2x_2 = 2k_2\dfrac{k_1x}{k_1+4k_2}$

$$\Rightarrow \quad k_1x_{1\,max} = \frac{2k_1k_2}{k_1+4k_2}x_{max} \quad \textbf{với} \quad x_{max} = A = 2.10^{-2}\text{ m}$$

$$= \frac{2.600.300}{600+4.300}.2.10^{-2} = 4 \text{ (N)}$$

Vậy : $T_{1(max)} = 50 + 4 = 54$ (N)

Lực cực đại tác dụng lên điểm A là **54 (N)**

- Lực cực tiểu tác dụng lên điểm B **chính là lực đàn hồi** cực tiểu của L_2 :

$$T_{(min)} = k_2(\Delta l_{02} + x_{2min})$$

Với : $k_2\Delta l_{02} = P = 25$ (N) **(do (2))**

$$k_2x_2 = \frac{k_2k_1}{k_1+4k_2}x \quad \textbf{(do (5))}$$

nên $k_2x_{2\,min} = \dfrac{k_2k_1}{k_1+4k_2}x_{min} = \dfrac{300.600}{600+4.300}(-2.10^{-2}) = -2$ (N)

Vậy $T_{min} = 25 - 2 = 23$ (N).

Chương IV

CON LẮC ĐƠN

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Phương trình dao động*

$$S = S_0\sin(\omega t + \varphi)$$

hay $$\alpha = \alpha_0\sin(\omega t + \varphi)$$

2. *Chu kì dao động :* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

3. *Bảng công thức gần đúng :* (với $\varepsilon << 1;\ \alpha \le 10^{o}$)

1. $(1 \pm \varepsilon)^n \approx 1 \pm n\varepsilon$
2. $\sqrt{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \dfrac{\varepsilon}{2}$
3. $(1 \pm \varepsilon_1)(1 \pm \varepsilon_2) \approx 1 \pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$
4. $\dfrac{1 \pm \varepsilon_1}{1 \pm \varepsilon_2} \approx 1 \pm \varepsilon_1 \mp \varepsilon_2$
5. $\sqrt{\dfrac{1 \pm \varepsilon_1}{1 \pm \varepsilon_2}} \approx 1 \pm \dfrac{\varepsilon_1}{2} \mp \dfrac{\varepsilon_2}{2}$
6. $\text{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$
7. $\cos\alpha \approx 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$

(6, 7) α : Radian

BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1 : CHU KÌ - TẦN SỐ - TẦN SỐ GÓC

- $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$
- Chu kì : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$
- Tần số : $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

Ví dụ 1 : Tính chiều dài của con lắc đơn, biết chu kì dao động bé l
$T = 2s$ ở nơi có gia tốc trọng trường là $g = 9{,}8 m/s^2$.

Giải

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = \frac{T^2.g}{4\pi^2} = \frac{2^2 \times 9{,}8}{4 \times \pi^2} \approx 0{,}994\ (m).$$

Ví dụ 2 : Hai con lắc đơn có chiều dài lần lượt là l_1, l_2, chu kì dao động T_1, T_2 ở nơi có gia tốc trọng trường là $g = 9,8 m/s^2$. Biết rằng cũng tại nơi đó con lắc đơn có chiều dài $l_1 + l_2$ có chu kì dao động là 2,4s và con lắc đơn có chiều dài $l_1 - l_2$ có chu kì dao động là 0,8s.

Hãy tính T_1, T_2, l_1, l_2.

Giải

+ Với chiều dài $l_1 + l_2$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}} \Rightarrow l_1 + l_2 = \frac{T^2.g}{4\pi^2} = \frac{2,4^2 \times 9,8}{4 \times \pi^2} \approx 1,43\ (m) \qquad (1)$$

+ Với chiều dài $l_1 - l_2$:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 - l_2}{g}} \Rightarrow l_1 - l_2 = \frac{T'^2.g}{4\pi^2} = \frac{0,8^2 \times 9,8}{4 \times \pi^2} \approx 0,159\ (m) \qquad (2)$$

Cộng 2 biểu thức (1) và (2) theo từng vế :

$$2l_1 = 1,589\ (m) \Rightarrow l_1 = 0,7945\ (m)$$

và (1) cho : $l_2 = 1,43 - 0,7945 = 0,6535$ (m).

Dạng 2 : CHU KÌ THAY ĐỔI DO NHIỆT ĐỘ THAY ĐỔI

+ Chiều dài con lắc đơn (bằng kim loại) phụ thuộc vào nhiệt độ :

$$l_t = l_0(1 + \alpha t)$$

Với l_0 : chiều dài ở 0^0C; α : hệ số nở dài; l_t : chiều dài ở t^0C

+ Chu kì ở 2 nhiệt độ t_1 và t_2 : $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$; $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$

+ Lập tỉ số : $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} = \sqrt{\frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}}$

+ Thường thì αt_1 và αt_2 là các số hạng rất bé so với 1 nên :

$$\frac{T_2}{T_1} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}(t_2 - t_1)$$

Ví dụ : Một con lắc đơn có chu kì T = 2s khi dao động bé. Nếu nhiệt độ tăng thêm 10^0C thì chu kì dao động bé bây giờ là bao nhiêu ? Biết dây treo con lắc làm bằng kim loại có hệ số dãn nở là $\alpha = 2.10^{-5}k^{-1}$ (gia tốc trọng trường g không đổi).

Giải

* Lúc đầu (ứng với nhiệt độ t_1, chiều dài l_1) :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \qquad \text{với} \qquad l_1 = l_0(1 + \alpha t_1)$$

- Lúc sau (ứng với nhiệt độ t_2, chiều dài l_2) :

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \qquad \text{với} \qquad l_2 = l_0(1 + \alpha t_2)$$

- Lập tỉ số : $\dfrac{T_2}{T_1} = \sqrt{\dfrac{l_2}{l_1}} = \sqrt{\dfrac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}}$

Với αt_1 và αt_2 là rất nhỏ so với 1 nên ta có gần đúng.

$$\frac{T_2}{T_1} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha(t_2 - t_1) = 1 + \frac{1}{2}\alpha.\Delta t$$

$$T_2 = T_1\left(1 + \frac{1}{2}\alpha.\Delta t\right) = 2\left(1 + \frac{1}{2}.2.10^{-5}.10\right) = 2(1 + 10^{-4}) = 2{,}0002\ (s).$$

Dạng 3 : CHU KÌ THAY ĐỔI DO THAY ĐỔI ĐỘ CAO

- Gia tốc trọng trường phụ thuộc theo độ cao h : $g = G\dfrac{M}{(R + h)^2}$

với
- G : hằng số hấp dẫn
- M : khối lượng trái đất
- R : bán kính trái đất
- h : độ cao kể từ mặt đất

- Chu kì con lắc tại độ cao h và tại mặt đất :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ ; \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}$$

- Lập tỉ số : $\dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}} = \sqrt{\dfrac{G\dfrac{M}{R^2}}{G\dfrac{M}{(R + h)^2}}} \Rightarrow \boldsymbol{\dfrac{T}{T_0} = 1 + \dfrac{h}{R}}$

Ví dụ : Hỏi phải đưa con lắc lên tới độ cao nào để chu kì của nó tăng thêm 0,005% so với chu kì của con lắc ấy tại mặt đất. Biết bán kính trái đất là R = 6400km và cho rằng nhiệt độ không đổi.

Giải

Chu kì con lắc tại mặt đất : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ với $g_0 = G\dfrac{M}{R^2}$

Chu kì con lắc tại độ cao h : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ với $g = G\frac{M}{(R + h)^2}$

Lập tỉ số : $\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{g_0}{g}} = 1 + \frac{h}{R}$ (1)

Theo đề : $\frac{T - T_0}{T_0} = 0,005\%$

$$\frac{T}{T_0} - 1 = \frac{0,005}{100} \rightarrow \frac{T}{T_0} = 1 + 5.10^{-5} \qquad (2)$$

(1) và (2) cho : $\frac{h}{R} = 5.10^{-5}$

$$\Rightarrow h = 5.10^{-5}R = 5.10^{-5}.6400\ (km) = 0,32\ (km).$$

Dạng 4 : ĐỘ NHANH, CHẬM CỦA ĐỒNG HỒ DO THAY ĐỔI CHU KÌ QUẢ LẮC

Muốn tính độ nhanh (hay chậm) của đồng hồ quả lắc trong thời gian t do thay đổi chu kì quả lắc ta lần lượt đi các bước :

1. Tính chu kì quả lắc lúc đồng hồ chạy đúng ($T_{đúng}$) và chạy sai (T_{sai}).
2. **Lập tỉ số 2 chu kì trên :** $\frac{T_{đúng}}{T_{sai}}$
3. **So sánh $T_{đúng}$ và T_{sai} :** + **Nếu $T_{sai} < T_{đúng}$: đồng hồ chạy nhanh**
   + **Nếu $T_{sai} > T_{đúng}$: đồng hồ chạy chậm**
4. **Từ tỉ số $\frac{T_{đúng}}{T_{sai}}$ ta tính $T_{đúng}$ theo T_{sai}**
5. **Độ sai của đồng hồ ứng với một chu kì dao động của quả lắc :**

   $\Delta T = |T_{đúng} - T_{sai}|$ **theo T_{sai}**
6. **Số dao động của quả lắc đồng hồ chạy sai trong thời gian t :** $N = \frac{t}{T_{sai}}$
7. **Độ sai của đồng hồ trong thời gian t :** $\Delta t = N.\Delta T = \frac{t}{T_{sai}} \times \Delta T.$

Ví dụ : Một đồng hồ quả lắc chạy đúng giờ ở 20^0C. Hỏi ở 30^0C (cũng tại nơi ấy) mỗi ngày đêm đồng hồ đã chạy nhanh hay chậm bao nhiêu? Cho rằng quả lắc đồng hồ coi như con lắc đơn mà thanh treo có hệ số dãn nở $\alpha = 2.10^{-5}.k^{-1}$.

Giải

1. Chu kì quả lắc ở 20^0C và 30^0C là :

$$T_{20} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{20}}{g}} \quad \text{với} \quad l_{20} = l_0(1 + 20\alpha)$$

$$T_{30} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{30}}{g}} \quad \text{với} \quad l_{30} = l_0(1 + 30\alpha)$$

2. Lập tỉ số : $\frac{T_{20}}{T_{30}} = \sqrt{\frac{l_{20}}{l_{30}}} = \sqrt{\frac{1 + 20\alpha}{1 + 30\alpha}} \approx 1 - 5\alpha < 1 \qquad (*)$

3. Có $T_{30} > T_{20}$: **đồng hồ ở 30^0C** đã chạy chậm.

4. Từ (*) suy **ra** : $T_{20} = (1 - 5\alpha)T_{30}$

5. Mỗi dao **động của quả lắc ở 30^0C** đồng hồ đã chậm :

$$\Delta T = T_{30} - T_{20} = T_{30} - (1 - 5\alpha)T_{30} = 5\alpha T_{30}$$

6. Mỗi ngày **đêm ở** 30^0C **quả lắc** đã thực hiện được :

$$N = \frac{86400}{T_{30}} \text{ (dao động)}$$

7. Vậy độ **chậm của đồng hồ trong** 1 ngày đêm :

$$\Delta t = N.\Delta T = \frac{86400}{T_{30}} \times 5\alpha.T_{30} = 86400 \times 5 \times 2.10^{-5} = 8{,}64 \text{ (s)}.$$

Dạng 5 : CHU KÌ DAO ĐỘNG CON LẮC TRONG HỆ KHÔNG QUÁN TÍNH

1. Các lực tác **dụng vào con lắc** :
- Trọng lực $m\vec{g}$
- Lực quán tính : $\vec{f}_{qt} = -m\vec{a}$
- Sức căng T **của dây treo**

2. Trọng lực **biểu kiến (trọng lực hiệu** dụng) : $\vec{P'} = m\vec{g} + \vec{f}_{qt}$

3. Gia tốc **biểu kiến (hay hiệu dụng)** : $g' = \frac{P'}{m}$

4. Chu kì con lắc : $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$.

Ví dụ 1 : **Con lắc đơn dao động** với chu kì T = 2s khi treo trong thang máy **đứng yên. Tính chu kì** dao động bé của nó khi thang máy :

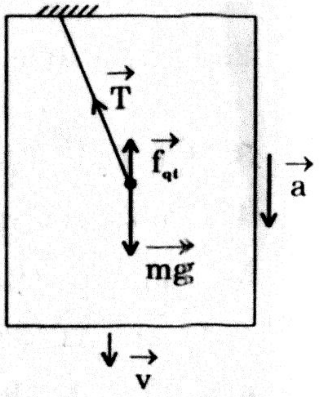
a) Đi xuống **nhanh dần đều với gia** tốc $\frac{g}{10}$

b) Đi xuống **chậm dần đều với gia** tốc $\frac{g}{10}$.

Giải

a) *Thang máy đi xuống nhanh dần đều* ($\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{V}$):

- Lấy hệ quy chiếu gắn liền với thang máy thì các lực tác dụng vào con lắc :



– Trọng lực $m\vec{g}$

– Lực quán tính $\vec{f}_{qt} = -m\vec{a}$ hướng lên

– Sức căng $\vec{T}$

- Trọng lực biểu kiến : $\vec{P}' = \vec{P} + \vec{f}_{qt}$

Vì $m\vec{g}$ và $\vec{f}_{qt}$ ngược hướng nên độ lớn của $\vec{P}'$ là :

$$P' = mg - |f_{qt}| = m(g - a) = \frac{9}{10}mg$$

- Gia tốc biểu kiến : $g' = \frac{P'}{m} = \frac{9}{10}g$

- Chu kì con lắc trong thang máy : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{9}.\frac{l}{g}}$ (1)

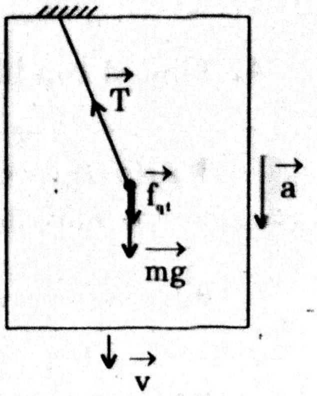
- **Khi thang máy đứng yên thì chu kì con lắc là :** $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (2)

- Lập tỉ số : $\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{10}{9}} \Rightarrow T' = \sqrt{\frac{10}{9}}.T \approx 2{,}108$ (s)

b) *Thang máy đi xuống chậm dần đều* ($\vec{a}$ ngược hướng $\vec{V}$):

- Tương tự như trường hợp câu a) với : $P' = mg + |f_{qt}| = \frac{11}{10}mg$

(vì $m\vec{g}$ và $\vec{f}_{qt}$ đều hướng xuống)



- Gia tốc biểu kiến : $g' = \frac{P'}{m} = \frac{11}{10}g$

- Chu kì con lắc trong thang máy :

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{9}.\frac{l}{g}} \quad (3)$$

- Tỉ số : $\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{10}{11}} \Rightarrow T' = \sqrt{\frac{10}{11}}.T \approx 1{,}907$ (s).

Ví dụ 2 : Một con lắc dao động với chu kì $T = 2s$ ở nơi có gia tốc trọng trường g. Con lắc được treo ở đầu xe ô tô đang chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang với gia tốc $a = \frac{g}{\sqrt{3}}$

a) Tính góc lệch của dây treo hợp với phương thẳng đứng khi con lắc cân bằng.

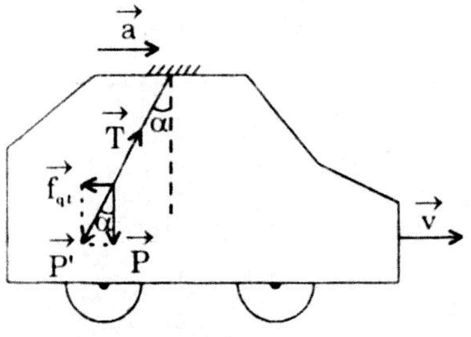
b) Tính chu kì dao động bé của con lắc.

Giải

a) *Góc lệch của dây treo :*

Lấy hệ quy chiếu gắn liền với xe. Các lực tác dụng vào con lắc :

- Trọng lực $m\vec{g}$
- Lực quán tính $\vec{f}_{qt} = -m\vec{a}$
- Sức căng $\vec{T}$ của dây treo lúc cân bằng :



$$\underbrace{\vec{f}_{qt} + m\vec{g}}_{} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{P'} \quad + \vec{T} = \vec{0}$$

$\vec{P'}$ và $\vec{T}$ là 2 lực trực đối nên $\vec{P'}$ cũng hợp với phương thẳng đứng góc α như dây treo.

Do $\vec{f}_{qt} \perp m\vec{g}$ nên : $\quad tg\alpha = \frac{f_{qt}}{mg} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^0$.

b) *Chu kì dao động bé của con lắc trong xe :*

Trọng lực biểu kiến : $\quad \vec{P'} = m\vec{g} + \vec{f}_{qt}$

Độ lớn : $\quad P' = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2} = m\sqrt{g^2 + a^2}$

Gia tốc biểu kiến : $\quad g' = \frac{P'}{m} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{g}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2g}{\sqrt{3}}$

Chu kì : $\quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{l}{g}}$

Với $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2s \quad$ nên : $\quad T' \approx 1,86$ (s).

Dạng 6 : CON LẮC ĐƠN MANG ĐIỆN TÍCH ĐẶT TRONG ĐIỆN TRƯỜNG ĐỀU

a) Lực điện trường : $\vec{f} = q\vec{E}$

- Cùng hướng với $\vec{E}$ nếu $q > 0$; Ngược hướng với $\vec{E}$ nếu $q < 0$
- Độ lớn : $f = |q|.E$

  (N) (C) (v/m)

b) Chu kì :

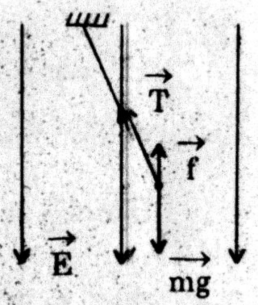
- Trọng lực biểu kiến : $\vec{P'} = \vec{P} + \vec{f}$
- Gia tốc biểu kiến : $g' = \dfrac{P'}{m}$
- Chu kì : $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g'}}$.

Ví dụ 1 : Một con lắc đơn có vật nặng khối lượng $m = 10g$ mang điện tích $q = -10^{-8}C$ dao động bé với chu kì $T = 2s$ ở nơi có $g = 10m/s^2$.

Sau đó đặt con lắc vào điện trường đều $\vec{E}$ hướng thẳng đứng xuống dưới với $E = 10^4$ v/m, tính chu kì dao động bé của con lắc.

Giải

- Các lực tác dụng vào con lắc :



  – Trọng lực $m\vec{g}$

  – Lực điện trường $\vec{f} = q\vec{E}$ hướng thẳng đứng lên trên (vì $q < 0$ nên $\vec{f}$ trái hướng với $\vec{E}$)

  – Sức căng $\vec{T}$

- Trọng lực biểu kiến : $\vec{P'} = m\vec{g} + \vec{f}$

  Vì $m\vec{g}$ và $\vec{f}$ ngược hướng nên độ lớn của $\vec{P'}$ là :

$$P' = mg - f = mg - |q|E$$

- Gia tốc biểu kiến : $g' = \dfrac{P'}{m} = g - \dfrac{|q|E}{m} = g\left(1 - \dfrac{|q|E}{mg}\right)$
- Chu kì : $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g'}}$ (1)

  Mặt khác, con lắc dao động lúc đầu với chu kì : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ (2)

(1) và (2) cho : $\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{|q|E}{mg}}}$

Với $\frac{|q|E}{mg} = \frac{10^{-8}.10^{4}}{0,01 \times 10} = \frac{10^{-4}}{0,1} = 10^{-3} << 1$ nên có gần đúng :

$$\frac{T'}{T} \approx 1 + \frac{1}{2}.\frac{|q|E}{mg} = 1 + \frac{1}{2} \times 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad T' = \left(1 + \frac{1}{2}.10^{-3}\right) \times 2 = 2{,}001 \text{ (s)}.$$

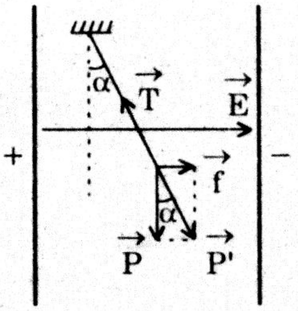
Ví dụ 2 : Một con lắc đơn có chiều dài l = 14,14cm, vật nặng khối lượng m = 10g và mang điện tích $q = 10^{-4}$C được treo trong điện trường đều của một tụ điện có khoảng cách hai bản là d = 10cm. Tụ điện đặt thẳng đứng và nối vào nguồn một chiều có hiệu điện thế U = 100V.

a) Xác định vị trí cân bằng của con lắc.

b) Tính chu kì dao động bé của con lắc. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.

Giải

a) *Vị trí cân bằng con lắc :*



- Các lực tác dụng vào con lắc ở vị trí cân bằng :

  + Trọng lực $m\vec{g}$

  + Sức căng $\vec{T}$

  + Lực điện trường $\vec{f} = q\vec{E}$ nằm ngang

- Điều kiện cân bằng :

$$\underbrace{m\vec{g} + \vec{f}} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P'} = -\vec{T}$$

$$\vec{P'} \quad + \vec{T} = \vec{0}$$

$\vec{P'}$ và $\vec{T}$ là 2 lực trực đối nên chúng cùng nằm trên giá dây treo.

Hình vẽ cho : $\text{tg}\alpha = \frac{f}{mg} = \frac{qE}{mg} = \frac{qU}{mgd} = \frac{10^{-4}.100}{0,01.10.0,1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^0$.

b) *Chu kì con lắc :*

- Trọng lực biểu kiến : $\vec{P'} = m\vec{g}$ Có độ lớn : $P' = \frac{mg}{\cos\alpha}$

- Gia tốc biểu kiến : $g' = \frac{P'}{m} = \frac{g}{\cos\alpha}$

- Chu kì dao động bé của con lắc :

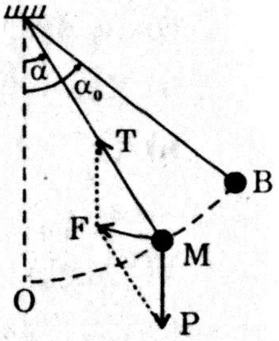
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\cos\alpha}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,1414.\frac{1}{\sqrt{2}}}{10}} \approx 0,628\ (s).$$

Dạng 7 : VẬN TỐC VÀ SỨC CĂNG DÂY

1. *Vận tốc*

- Chọn mốc thế năng tại vị trí cân bằng O.
- Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng : $\frac{1}{2}mV_M^2 + mgh_M = mgh_B$

với $\begin{cases} h_M = \ 1 - \cos\alpha) \\ h_B = l(1 - \cos\alpha_0) \end{cases}$



- Kết quả : $\mathbf{V = \sqrt{2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}}$

2. *Sức căng dây*

- Định luật II Niutơn : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$
- Chiếu lên giá của $\vec{T}$: $-P\cos\alpha + T = m\frac{v^2}{l}$

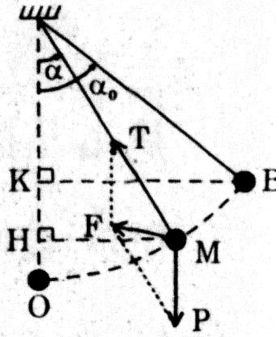
$$-mg\cos\alpha + T = 2mg(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

$$\mathbf{T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0)}$$

Ví dụ : Một con lắc có chiều dài l = 1m, khối lượng quả cầu m = 50g dao động ở nơi g = 9,81m/s^2, bỏ qua mọi ma sát. Góc lệch cực đại của con lắc so với phương thẳng đứng là $\alpha = 30^0$. Hãy tính vận tốc quả cầu và lực căng của dây treo :

a) Tại vị trí mà li độ góc của con lắc là $\alpha = 8^0$.

b) Tại vị trí cân bằng của con lắc.



Giải

- *Vận tốc :* Định luật bảo toàn cơ năng : $E_M = E_B$

$$\frac{1}{2}mV_M^2 + mgh_M = mgh_B \Rightarrow V_M = \sqrt{2g(h_B - h_M)}$$

Lấy mốc thế năng tại vị trí cân bằng O thì :

Với $\begin{cases} h_B = OK = AO - AK = l - l\cos\alpha_0 = l(1 - \cos\alpha_0) \\ h_M = OH = AO - AH = l(1 - \cos\alpha) \end{cases}$

Ta được : $V_M = \sqrt{2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$ (*)

a) *$\alpha = 8^0$:*

+ $\alpha = 8^0 = \dfrac{8\pi}{180}$ rad $\approx 0,1396$ (rad)

+ α là góc bé nên $\quad \cos\alpha \approx 1 - \dfrac{\alpha^2}{2} \approx 0,99$

+ Công thức (*) cho : $V = \sqrt{2 \times 9,81 \times 1\left(0,99 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} \approx 1,56$ (m/s).

b) *Tại vị trí cân bằng ($\alpha = 0$) :*

- *Vận tốc :* Công thức (*) cho : $V = 1,62$ (m/s)
- *Lực căng :* Hợp lực tại M : $\quad m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$

Chiếu xuống giá của $\vec{T}$ (chiều dương là chiều của $\vec{T}$) ta được :

$$-mg\cos\alpha + T = m\frac{V^2}{l}$$

(*) $\Rightarrow \quad \dfrac{V^2}{l} = 2g(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$ nên :

$-mg\cos\alpha + T = 2mg(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \quad \Rightarrow \quad T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0) \quad (**)$

+ *$\alpha = 8^0 \rightarrow \cos\alpha \approx 0,99$:* $\quad (**) \Rightarrow \quad T = 0,05.9,81\left(3.0,99 - 2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0,607$ (N

+ *$\alpha = 0^0 \rightarrow \cos\alpha = 1$:* $\quad (**) \Rightarrow \quad T = 0,62$ (N).

Dạng 8 : CON LẮC TRÙNG PHÙNG

- Hai con lắc có chu kì hơi khác nhau, khi dao động có lúc chúng cùng qua đường thẳng đứng theo cùng một chiều. Mỗi lần xảy ra như vậy, ta nói có sự trùng phùng giữa hai con lắc.
- Giữa hai lần trùng phùng liên tiếp, con lắc chạy nhanh (chu kì bé) sẽ nhiều hơn một dao động.
- Gọi N là số dao động của con lắc chạy chậm, thời gian giữa hai lần trùng phùng liên tiếp :

$$\mathcal{T} = NT_1 = (N+1)T_2 \qquad \text{với } T_1 > T_2$$

Ví dụ : Hai con lắc (L) và (L') có chiều dài $l = 1$m và $l' = 1,002$m cùng dao động bé trong hai mặt phẳng thẳng đứng song song. Tính khoảng thời gian giữa 2 lần liên tiếp chúng cùng lúc đi qua vị trí cân bằng theo cùng chiều như trước (gọi là trùng phùng). Lấy $g \approx \pi^2$ m/s^2.

Giải

Gọi T và T' lần lượt là chu kì dao động của 2 con lắc (L) và (L').

Ta có : $\dfrac{T}{T'} = \sqrt{\dfrac{l}{l'}} = \sqrt{\dfrac{1}{1{,}002}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+0{,}002}} = (1+0{,}002)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - 0{,}001$ (1

Vì T < T' nên con lắc (L) dao động nhanh hơn (L'), do đó nếu giữa 2 lần trùng phùng liên tiếp con lắc (L) thực hiện được N dao động th con lắc (L') thực hiện được (N – 1) dao động, thời gian giữa 2 lần trùn phùng liên tiếp là :

$$\mathcal{T} = N.T = (N-1)T' \qquad (2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{T}{T'} = \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N} \qquad (3$$

(1) và (3) cho : N = 1000 (dao động)

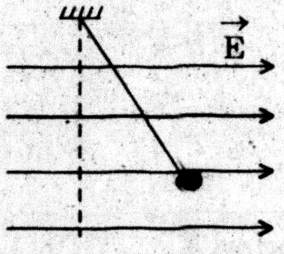
Mặt khác : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{\pi^2}} = 2\ (s)$

Thay N = 1000 và T = 2s vào biểu thức (2), ta được :

$$\mathcal{T} = 1000 \times 2 = 2000\ (s) = 33 \text{ phút } 20s.$$

ĐỀ THI

4.1 Một con lắc đơn có chu kì dao động bằng 2s ở nơi mà gia tốc trọng trường là $g = 9{,}8 m/s^2$ và ở 0^0C. Dây treo con lắc có hệ số nở dài $\alpha = 4.10^{-5}.k$. Bỏ qua mọi ma sát và lực cản của môi trường.



1. Tính chiều dài l_0 của con lắc ở 0^0C và chu kì dao động của nó ở 20^0C.

2. Để con lắc ở 20^0C có chu kì vẫn là 2s, người ta truyền cho quả cầu của con lắc một điện tích $q = 2.10^{-9}C$ rồi đặt nó trong một điện trường đều có cường độ E nhỏ, có các đường sức từ nằm ngang và song song với mặt phẳng dao động của con lắc. Biết khối lượng con lắc là m = 1g, hãy tính cường độ điện trường và góc giữa phương thẳng đứng và phương của dây treo khi con lắc cân bằng.

(HỌC VIỆN QUÂN Y – 7/96)

Giải

1. *Chiều dài con lắc ở 0^0C và chu kì ở 20^0C :*

- Chu kì ở 0^0C :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}} = 2\ (s) \qquad (1) \qquad \Rightarrow \qquad l_0 = \frac{T_0^2.g}{4\pi^2} = \frac{2^2.9{,}8}{4.3{,}14^2} \approx 0{,}994\ (m)$$

- Chu kì ở 20^0C : $T_{20} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_{20}}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_0(1+\alpha t)}{g}}$

Lập tỉ số : $\dfrac{T_{20}}{T_0} = \sqrt{1+\alpha t} \approx 1 + \dfrac{\alpha t}{2}$

$$\Rightarrow \quad T_{20} = T_0\left(1+\frac{\alpha t}{2}\right) = 2\left(1+\frac{4.10^{-5}.20}{2}\right) = 2{,}0008 \text{ (s)}.$$

2. *Cường độ điện trường và góc α :*

- Khi có điện trường, con lắc chịu thêm lực điện trường nằm ngang và cùng chiều với $\vec{E}$ nên trọng lực biểu kiến của con lắc là : $\vec{P'} = \vec{P} + \vec{f}$

Độ lớn : $P' = \sqrt{P^2 + f^2} = \sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}$

Gia tốc biểu kiến : $g' = \dfrac{P'}{m} = \sqrt{g^2 + \left(\dfrac{qE}{m}\right)^2} = g\sqrt{1 + \left(\dfrac{qE}{mg}\right)^2}$

Chu kì con lắc ở trong điện trường đều (20^0C) :

$$T'_{20} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{20}}{g'}} = 2 \text{ (s)} \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2), ta được :

$$\sqrt{\frac{l_0}{g}} = \sqrt{\frac{l_{20}}{g'}} = \sqrt{\frac{l_0(1+20\alpha)}{g\sqrt{1+\left(\dfrac{qE}{mg}\right)^2}}} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1+20\alpha}{\sqrt{1+\left(\dfrac{qE}{mg}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \left(\frac{qE}{mg}\right)^2 = (1+20\alpha)^2 \approx 1 + 40\alpha$$

$$\frac{qE}{mg} = \sqrt{40\alpha}$$

$$E = \frac{mg}{q}\sqrt{40\alpha} = \frac{10^{-3}.9,8}{2.10^{-9}}\sqrt{40.4.10^{-5}} = 1{,}96.10^{-5} \text{ (v/m)}.$$

- Lúc cân bằng dây treo hợp với phương thẳng đứng góc α mà :

$$\text{tg}\alpha = \frac{f}{P} = \frac{qE}{mg}$$

Biểu thức (3) cho : $\dfrac{qE}{mg} = \sqrt{40\alpha} = 4 \times 10^{-2}$

Vậy : $\text{tg}\alpha = 0{,}04 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 0{,}04 \text{ rad} \approx 2^0 13'$.

4.2 Một con lắc đơn có chu kì T = 2s, vật nặng là quả cầu kim loại có khối lượng m.

a) Tính chiều dài dây treo.

b) Con lắc đang ở vị trí cân bằng. Dùng búa gõ nhẹ vào con lắc làm cho nó có vận tốc V = 5cm/s theo phương nằm ngang trong mặt phẳng dao động của con lắc. Tìm góc lệch cực đại của con lắc khỏi vị trí cân bằng.

c) Viết phương trình dao động của con lắc sau kích thích.

d) Chu kì dao động của con lắc thay đổi bao nhiêu lần nếu quả cầu được tích điện dương q và đặt thêm một điện trường đều có vectơ cường độ $\vec{E}$ hướng xuống dưới theo phương thẳng đứng ở vùng dao động của con lắc. Lấy $g = 10m/s^2$ và bỏ qua mọi ma sát.

(ĐH SƯ PHẠM HÀ NỘI 2 – 7/96)

Giải

a) *Chiều dài dây treo con lắc :*

Chu kì con lắc : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{T^2.g}{4\pi^2} = \frac{2^2.10}{4,.3,14^2} = 1{,}014...\ (m) \approx 1\ (m)$$

b) *Góc lệch cực đại của con lắc :*

Chọn mốc thế năng tại vị trí cân bằng.

Định luật bảo toàn cơ năng : $\dfrac{1}{2}mV^2 = mgl(1 - \cos\alpha_{max})$

$$\Rightarrow \quad 1 - \cos\alpha_{max} = \frac{V^2}{2gl} = \frac{(5.10^{-2})^2}{2 \times 10 \times 1} = 1{,}25.10^{-4}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha_{max} = 1 - 1{,}25.10^{-4} \qquad (1)$$

Vì $\cos\alpha_{max}$ gần bằng 1 nên α_{max} rất nhỏ, do đó ta có gần đúng :

$$\cos\alpha_{max} \approx 1 - \frac{\alpha^2_{max}}{2} \qquad (2)$$

(1) và (2) cho : $\dfrac{\alpha^2_{max}}{2} = 1{,}25.10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{max} = 1{,}58.10^{-2}\ (rad) \approx 54'$.

c) *Phương trình dao động của con lắc :*

Chọn gốc tọa độ là vị trí cân bằng O phương trình chuyển động :

$$S = S_0\sin(\omega t + \varphi)$$

Với : + $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ (rad/s)

+ $S_0 = l.\alpha_{max} = 100 \times 1{,}58.10^{-2} = 1{,}58$ (cm)

+ Chọn t = 0 là lúc vật bắt đầu chuyển động (S = 0) và đi theo chiều dương (V = S' > 0) :

Ta có $\begin{cases} 0 = S_0 \sin\varphi \\ V = S' = \omega S_0 \cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi = 0$

Vậy : $S = 1{,}58\sin\pi t$ (cm)

Hoặc cũng có thể viết dưới dạng góc lệch :

$$\alpha = \alpha_{max}\sin(\omega t + \varphi) = 1{,}58.10^{-2}\sin\pi t \text{ (rad)}.$$

d) *Sự thay đổi chu kì khi con lắc đặt trong điện trường :*

Khi con lắc mang điện tích q > 0 và đặt trong điện trường đều hương xuống dưới thì con lắc chịu thêm lực điện trường $\vec{f} = q\vec{E}$ hướng xuống.

Trọng lực biểu kiến của con lắc : $\vec{P'} = \vec{P} + \vec{f}$

Độ lớn của $\vec{P'}$: $p' = mg + qE$

Gia tốc biểu kiến : $g' = \dfrac{P'}{m} = g + \dfrac{qE}{m}$

Chu kì con lắc trong điện trường đều : $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g'}}$

Lập tỉ số : $\dfrac{T'}{T} = \sqrt{\dfrac{g}{g'}} = \sqrt{\dfrac{g}{g + \dfrac{qE}{m}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{qE}{mg}}}$

Vậy : chu kì giảm đi $\sqrt{1 + \dfrac{qE}{mg}}$ lần.

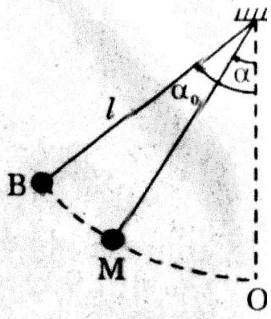
4.3 Một con lắc đơn có chiều dài l = 1m, khối lượng m. Kéo con lắc ra khỏi vị trí cân bằng một góc α_0 có $\cos\alpha_0 = 0{,}875$ và thả cho dao động. Lấy gia tốc $g = \pi^2 = 9{,}85 m/s^2$. Bỏ qua ma sát và sức cản.

a) Xác định vận tốc cực đại của con lắc và vận tốc lúc góc $\alpha = 6^0$ so với vị trí cân bằng.

b) Khi chuyển động tới vị trí cân bằng con lắc va chạm với quả cầu m' có khối lượng bằng 4m đang đứng yên ở cùng độ cao. Sau va chạm cả hai vật gắn chặt với nhau và cùng dao động, lấy gốc thời gian lúc va chạm và xác định những thời điểm để con lắc có động năng bằng 3 lần thế năng.

(ĐH KIẾN TRÚC HÀ NỘI – 7/97)

Giải



a) *Vận tốc con lắc :*

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng : $E_B = E_M$

$$mgh_B = mgh_M + \frac{1}{2}mV^2$$

$$\Rightarrow \quad V^2 = 2g(h_B - h_M)$$

Chọn mốc thế năng tại vị trí cân bằng O thì : $\begin{cases} h_B = l(1-\cos\alpha_0) \\ h_M = l(1-\cos\alpha) \end{cases}$

nên : $V^2 = 2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$ (1

- Vận tốc cực đại ứng với $\alpha = 0 \rightarrow \cos\alpha = 1$

$$V_{max} = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha_0)} = \sqrt{2\times 9,85(1-0,875)} \approx 1,57 \text{ (m/s)}$$

- $\alpha = 6^0 = \dfrac{6\pi}{180}$ rad (góc bé)

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{6\pi}{180}\right)^2 = 0,995$$

$$(1) \Rightarrow V = \sqrt{2\times 9,85(0,995-0,875)} = 1,5375... \approx 1,54 \text{ (m/s)}.$$

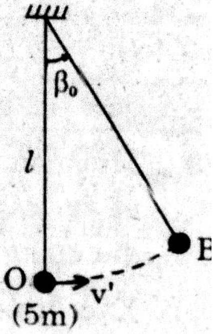
b) *Phương trình chuyển động :*

+ Áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho 2 vật va chạm :

$$mV_{max} = (m+4m)V' \quad \Rightarrow \quad V' = \frac{V_{max}}{5} = \frac{1,57}{5} = 0,314 \text{ (m/s)}$$

Đó là vận tốc của con lắc sau va chạm.

+ Chọn mốc thế năng tại vị trí cân bằng O. Áp dụng định luật bảo toà năng lượng sau va chạm, ta có :



$$\frac{1}{2}(5m)V'^2 = (5m).g.h_{B'} \quad \Rightarrow \quad h_{B'} = \frac{V'^2}{2g}$$

Với $h_{B'} = l(1-\cos\beta_0)$ nên : $l(1-\cos\beta_0) = \dfrac{V'^2}{2g}$

$$1 - \cos\beta_0 = \frac{V'^2}{2gl} = \frac{0,314^2}{2\times 9,85.1} = 0,005$$

$\cos\beta_0$ gần bằng 1 nên β_0 rất nhỏ, vậy : $\cos\beta_0 \approx 1 - \dfrac{\beta_0^2}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\beta_0^2}{2} = 1 - \cos\beta_0 = 0,005 \quad \Rightarrow \quad \beta_0 = 0,1 \text{ (rad)}$$

$\Rightarrow \quad S_0 = \overset{\frown}{OB'} = l\beta_0 = 100 \times 0,1 = 10 \text{ (cm)}$

Phương trình chuyển động của con lắc sau va chạm : $S = S_0\sin(\omega t + \varphi)$

Với $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{1}} = \pi$ (rad/s)

Chọn $t = 0$ là lúc vật bắt đầu chuyển động (lúc 2 vật va chạm) và chiều dương là chiều vật chuyển động thì : $S = 0$; $S' > 0$

$$\begin{cases} 0 = S_0 \sin\varphi \\ S' = \omega S_0 \cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

Vậy : $S = 10\sin\pi t$ (cm) hay : $\beta = \beta_0\sin\pi t = 0,1\sin\pi t$ (rad).

- *Thời điểm để động năng bằng ba lần thế năng :*

Theo định luật bảo toàn cơ năng : $E_đ + E_t = mgh_B$

$$3E_t + E_t = mgl(1 - \cos\beta_0)$$

$$4E_t = mgl(1 - \cos\beta_0)$$

Gọi β là li độ góc ứng với vị trí có $E_đ = 3E_t$ thì :

$$4mgl(1 - \cos\beta) = mgl(1 - \cos\beta_0)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \cos\beta = \frac{1}{4}(1 - \cos\beta_0) = \frac{1}{4} \times 0,005$$

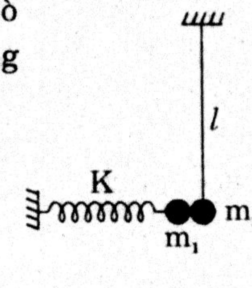
Với : $\cos\beta \approx 1 - \dfrac{\beta^2}{2}$ nên : $\dfrac{\beta^2}{2} = 0,00125 \rightarrow \beta = 0,05$

mà : $\beta = 0,1\sin\pi t$ nên :

$$\sin\pi t = 0,5 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \pi t = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ \pi t = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{6} + 2k \\ t = \dfrac{5}{6} + 2k \end{cases} \quad (k \in Z),$$

với $t > 0$, ta có : $t = \dfrac{1}{6}$ (s); $\dfrac{5}{6}$ (s); $\dfrac{13}{6}$ (s); ...

4.4 Con lắc đơn khối lượng $m_1 = 100$g dài $l = 1$m. Con lắc lò xo gồm một lò xo có khối lượng không đáng kể, độ cứng $k = 25$N/m, khối lượng $m_2 = m_1 = m = 100$g.



1. Tìm chu kì dao động riêng của mỗi con lắc.

2. Bố trí 2 con lắc sao cho khi hệ cân bằng, lò xo không biến dạng, dây treo thẳng đứng và 2 quả cầu tiếp xúc nhau như hình vẽ. Kéo m_1 lệch khỏi vị trí cân bằng góc $\alpha = 0,1$rad rồi buông.

a) Tìm vận tốc quả cầu m_1 ngay trước lúc va chạm vào quả cầu m_2 (xem là góc nhỏ).

b) Tìm vận tốc của quả cầu m_2 ngay sau khi va chạm với m_1 và độ né cực đại của lò xo sau khi va chạm.

c) Tìm chu kì dao động của hệ.

Coi va chạm là xuyên tâm đàn hồi. Bỏ qua mọi ma sát. Lấy $g = 10$ m/s $\pi^2 = 10$.

(ĐH GIAO THÔNG VẬN TẢI HÀ NỘI – 7/9

Giải

1. *Chu kì dao động riêng :*

Chu kì con lắc đơn : $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2$ (s)

Chu kì con lắc lò xo : $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,1}{25}} = 0,4$ (s)

2.a) *Vận tốc quả cầu m_1 trước lúc va chạm :*

Chọn mốc thế năng tại vị trí cân bằng của hệ.

Gọi V_1 là vận tốc của m_1 trước lúc va chạm, theo định luật bảo toàn c năng, ta có :

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 = m_1gl(1 - \cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad V_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}$$

Vì α là góc nhỏ nên : $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow 1 - \cos\alpha \approx \frac{\alpha^2}{2}$

Do đó : $V_1 = \sqrt{2gl.\frac{\alpha^2}{2}} = \alpha\sqrt{gl} = 0,1\sqrt{10.1} = 0,1\pi = 0,314$ (m/s).

b) *Vận tốc của m_2 ngay sau va chạm và độ nén cực đại của lò xo :*

+ Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng :

$$m_1V_1 = m_1V'_1 + m_2V'_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = V'_1 + V'_2 \text{ (vì } m_1 = m_2) \qquad (1$$

+ Vì va chạm đàn hồi nên động năng được bảo toàn :

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 = \frac{1}{2}m_1V_1'^2 + \frac{1}{2}m_2V_1'^2 \quad \Rightarrow \quad V_1^2 = V_1'^2 + V_2'^2 \qquad (2$$

+ (1) và (2) cho : $V_1^2 = (V_1 - V_2')^2 + V_2'^2$

$$(0,1\pi)^2 = (0,1\pi - V'_2)^2 + V_2'^2$$

$$0,1 = 0,1 + V_2'^2 - 0,1\pi.V_2' + V_2'^2$$

$$\Rightarrow \quad V'_2(V'_2 - 0,1\pi) = 0$$

$V'_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad V'_2 = 0,1\pi = 0,314$ (m/s)

Có thể lí luận ngắn gọn hơn như sau : vì 2 quả cầu giống nhau, vì chúng va chạm xuyên tâm và đàn hồi nên sau va chạm chúng trao đổi vận tốc cho nhau : $V'_1 = 0$; $V'_2 = V_1 = 0,314$ (m/s)

+ Quả cầu m_2 đang ở vị trí cân bằng O nhận được động năng $\frac{1}{2}m_2V_2'^2$ nên con lắc lò xo dao động và có thế năng cực đại bằng động năng mà nó vừa nhận được :

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_2V_2'^2 \quad \Rightarrow \quad A = V'_2\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 0,1\pi\sqrt{\frac{0,1}{25}} = 0,02\text{m}$$

A là biên độ dao động của m_2 cũng là độ nén cực đại của lò xo : A = 2 (cm).

c) *Chu kì dao động của hệ :*

Sau khi va chạm thì quả cầu m_1 đứng lại, quả cầu m_2 dao động với chu kì T_2. Sau thời gian $\frac{T_2}{2}$ thì quả cầu m_2 trở lại vị trí cân bằng O và va chạm với m_1 đang đứng yên. Sau va chạm có sự trao đổi vận tốc làm cho m_2 đứng lại, m_1 chuyển động với chu kì T_1. Sau thời gian $\frac{T_1}{2}$, m_1 lại trở về vị trí cân bằng O và va chạm với m_2 đang đứng yên, ... Hiện tượng cứ tiếp diễn như vậy. Do đó chu kì dao động của hệ :

$$T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \frac{1}{2}(1 + 0,4) = 1,2 \text{ (s)}.$$

4.5 Con lắc Phu-cô ở nhà thờ thánh I-xắc, thành phố Xanh Pê-téc-bua là một con lắc đơn, gồm một quả nặng có khối lượng m = 5kg, treo vào trần vòm nhà thờ bằng một sợi dây không trọng lượng, không dãn độ dài l = 98m. Gia tốc rơi tự do ở Xanh Pê-téc-bua là $g = 9,819\text{m/s}^2$ và nhiệt độ trong nhà thờ là 20^0C.

1. Tính chu kì dao động của con lắc chính xác đến 0,001s (cho biết $\pi = 3,1416$).

2. Nếu treo con lắc ấy ở Hà Nội, nơi có gia tốc rơi tự do là $g' = 9,793\text{m/s}^2$ và nhiệt độ 30^0C và cho nó dao động liên tục trong 6 giờ thì con lắc dao động nhanh hơn, hay chậm hơn bao nhiêu giây so với ở Xanh Pê-téc-bua. Cho biết hệ số nở dài của sợi dây treo là $\alpha = 2.10^{-5}\text{k}^{-1}$.

3. Trong quá trình dao động, góc lệch cực đại của dây treo con lắc, so với đường thẳng đứng đi qua điểm treo là $\alpha_m = 0,02$rad. Coi chuyển động của quả nặng có quỹ đạo thẳng, Hãy viết phương trình dao động của nó, tính vận tốc của nó khi qua vị trí cân bằng và sức căng của dây treo. Bỏ qua sức cản không khí.

(ĐH CÔNG ĐOÀN – 98)

Giải

1. *Chu kì con lắc :*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{98}{9,819}} = 2\times 3,1416\sqrt{\frac{98}{9,819}} = 19,849989... \approx 19,850\ (s)$$

2. *Độ nhanh (hay chậm) của con lắc ở Hà Nội :*

Chu kì con lắc ở Hà Nội : $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}$

Lập tỉ số : $\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{l}{l'}} \times \sqrt{\frac{g'}{g}}$ với :

$$\sqrt{\frac{l}{l'}} = \sqrt{\frac{l_0(1+20\alpha)}{l_0(1+30\alpha)}} \approx 1 + \frac{1}{2}(20\alpha - 30\alpha) = 1 - 5\alpha = 1 - 5.2.10^{-5} = 1 - 10^{-4}$$

$$\sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{\frac{9,793}{9,819}} = \sqrt{\frac{9,819 - 0,026}{9,819}} = \sqrt{1 - \frac{26}{9189}} \approx \sqrt{1 - 26.10^{-4}} \approx 1 - 13.10^{-4}$$

nên : $\frac{T}{T'} = (1 - 10^{-4})(1 - 13.10^{-4}) \approx 1 - 10^{-4} - 13.10^{-4} = 1 - 14.10^{-4} < 1$

$T' > T$: con lắc ở Hà Nội chạy chậm hơn.

Mỗi dao động ở Hà Nội con lắc đã chậm :

$$\Delta T = T' - T = T' - (1 - 14.10^{-4})T' = 14.10^{-4}T'$$

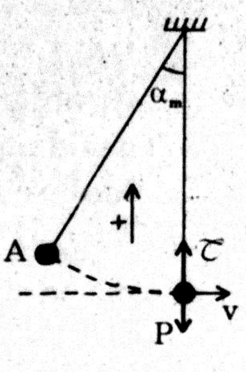
Số dao động con lắc thực hiện được trong 6 giờ = 21600s tại Hà Nội là

$$N = \frac{21600}{T'}$$

Vậy độ chậm của con lắc ở Hà Nội trong 6 giờ :

$$\Delta t = N.\Delta T = \frac{21600}{T'}.14.10^{-4}T' = 30,24\ (s).$$

3. *Phương trình dao động – Vận tốc và sức căng dây :*



- Phương trình chuyển động : $\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \varphi)$

Với : $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9,819}{98}} \approx 0,1\ (rad/s)$

Chọn t = 0 là lúc con lắc qua vị trí cân bằng theo chiều dương : $\alpha = 0$ và $\alpha' > 0$, ta được :

$$\begin{cases} 0 = \alpha_m \sin\varphi \\ \alpha' = \omega\alpha_m \cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

Vậy : $\alpha = 0,02\sin 0,1t$ (rad)

- Lấy mốc thế năng tại vị trí cân bằng O thì :

$$mgh_A = \frac{1}{2}mV^2 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2gh_A} \qquad \text{với} \qquad h_A = l(1 - \cos\alpha_m)$$

$$= \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_m)}$$

Với góc nhỏ $\cos\alpha_m \approx 1 - \frac{\alpha_m^2}{2}$ nên :

$$V = \sqrt{gl\alpha_m^2} = \alpha_m\sqrt{gl} = 0,02\sqrt{9,819.98} = 0,6204069 \approx 0,62\ (m/s)$$

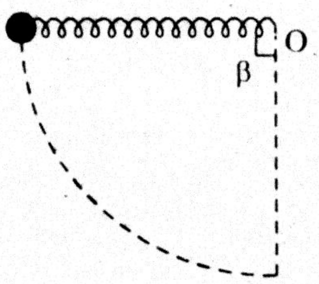
- Tại vị trí cân bằng O, hợp lực hướng tâm : $\vec{F}_{ht} = \vec{P} + \vec{\mathcal{T}}$

$$\Rightarrow \quad m\frac{V^2}{l} = -mg + \mathcal{T}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{T} = m\left(g + \frac{V^2}{l}\right) = 5\left(9,819 + \frac{0,62^2}{98}\right) = 49,114612... \approx 49,1\ (N).$$

4.6 Một quả cầu có khối lượng m = 2kg treo ở đầu một sợi dây có khối lượng không đáng kể và không bị dãn. Bỏ qua ma sát và sức cản. Lấy $g = 10m/s^2$.

1. Kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một góc α_m rồi thả (vận tốc ban đầu bằng không). Thiết lập biểu thức lực căng của dây treo khi quả cầu ở vị trí lệch một góc α so với vị trí cân bằng. Tìm vị trí của quả cầu trên quỹ đạo để lực căng cực đại. Tính độ lớn của lực căng cực đại đó nếu góc $\alpha_m = 60^0$.



2. Phải kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một góc bao nhiêu để khi thả cho dao động lực căng cực đại gấp 3 lần trọng lượng quả cầu ?

3. Thay sợi dây treo quả cầu bằng một lò xo có trọng lượng không đáng kể. Độ cứng của lò xo là k = 500N/m, chiều dài ban đầu l_0 = 0,6m. Lò xo có thể dao động trong mặt phẳng thẳng đứng xung quanh điểm treo O. Kéo quả cầu ra khỏi vị trí cân bằng một góc β = 90^0 rồi thả ra. Lúc bắt đầu thả, lò xo ở trạng thái không bị nén dãn. Xác định độ dãn của lò xo khi quả cầu đến vị trí cân bằng.

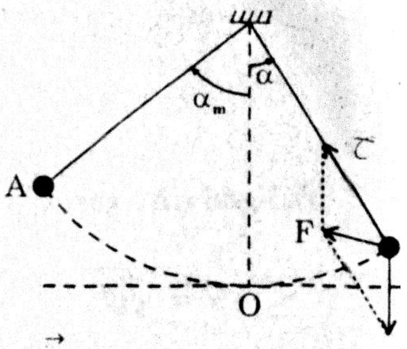
(ĐH KIẾN TRÚC HÀ NỘI – 98)

Giải

1. *Biểu thức tính lực căng :*

- Chọn mốc thế năng tại vị trí cân bằng O. Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng tại 2 điểm A và M :

$$mgh_A = \frac{1}{2}mV^2 + mgh_M \quad \Rightarrow \quad V^2 = 2g(h_A - h_M)$$



Với $\begin{cases} h_A = l(1 - \cos\alpha_m) \\ h_M = l(1 - \cos\alpha) \end{cases}$ ta được :

$$V^2 = 2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_m)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V^2}{l} = 2g(\cos\alpha - \cos\alpha_m)$$

Hợp lực tác dụng vào vật khi qua M : $\vec{F} = \vec{P} + \vec{\mathcal{T}}$

Chiếu xuống bán kính qua M (với chiều dương hướng về tâm) :

$$m\frac{V^2}{l} = -mg\cos\alpha + \mathcal{T}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{T} = m\left(\frac{V^2}{l} + g\cos\alpha\right) = m(2g\cos\alpha - 2g\cos\alpha_m + g\cos\alpha)$$

$$= mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_m)$$

- Với mg, $\cos\alpha_m$ không đổi thì sức căng $\mathcal{T}$ cực đại khi $\cos\alpha = 1 \rightarrow \alpha =$ Tức là khi vật qua vị trí cân bằng.

Vậy : $\mathcal{T}_{max} = mg(3 - 2\cos\alpha_m) = 2.10\left(3 - 2.\frac{1}{2}\right) = 40$ (N).

2. *Giá trị α_m để $\mathcal{T}_{max} = 3mg$:*

$$\mathcal{T}_{max} = mg(3 - 2\cos\alpha_m) = 3mg \quad \Rightarrow \quad 3 - 2\cos\alpha_m = 3$$

$$\cos\alpha_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_m = 90^0.$$

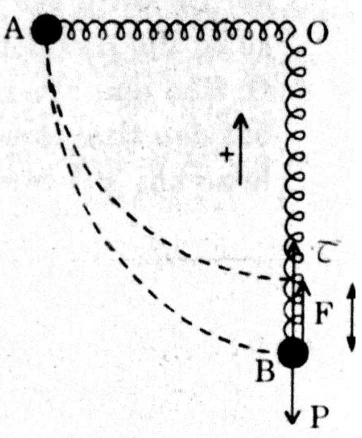
3. *Độ dãn của lò xo khi vật qua vị trí cân bằng :*

Gọi x là độ dãn của lò xo lấy mốc thế năng tại B. Định luật bảo toàn cơ năng :

$$mg(l_0 + x) = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$2mg(l_0 + x_0) = mV^2 + kx^2$$

$$\Rightarrow \quad mV^2 = -kx^2 + 2mg(l_0 + x)$$



Trong đó $\frac{1}{2}kx^2$ là thế năng do lò xo dãn ra đoạn x. Mặt khác, khi vật qua B, hợp lực $\vec{F}$ hướng tâm với : $F = \mathcal{T} - P$

$$m\frac{v^2}{(l_0 + x)} = \mathcal{T} - mg \quad \text{với} \quad \mathcal{T} = kx$$

$$\Rightarrow \quad mV^2 = (kx - mg)(l_0 + x) \qquad (2)$$

(1) và (2) cho : $-kx^2 + 2mg(l_0 + x) = (kx - mg)(l_0 + x)$

$$-kx^2 + 2mgl_0 + 2mgx = kl_0x + kx^2 - mgl_0 - mgx$$

$$2kx^2 + (kl_0 - 2mg)x - 3mgl_0 = 0$$

Với $k = 500N/m$; $l_0 = 0,6m$; $m = 2kg$; $g = 10m/s^2$

Ta được : $1000x^2 + 240x - 36 = 0$

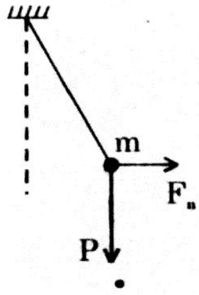
$$250x^2 + 60x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-30 \pm \sqrt{3150}}{250}$$

Chỉ nhận x = 0,1045... (m) → x ≈ 10,45 (cm).

4.7 Một con lắc đơn có chiều dài $l = 1m$ treo vào điểm O cố định. Biết rằng trong quá trình con lắc dao động với biên độ nhỏ, vật nặng m của con lắc còn chịu tác dụng của một lực F_n không đổi có phương luôn hợp với vectơ trọng lực $\vec{P}$ một góc $\alpha = 90^0$ và có độ lớn $F_n = P$ (Hình vẽ)

1. Xác định phương của dây treo con lắc ở vị trí cân bằng và tính chu kì dao động nhỏ của nó.

2. Người ta đặt thêm vào không gian xung quanh nó một điện trường $\vec{E}$ có hướng ngược hướng với $\vec{P}$ và có độ lớn $E = (\sqrt{3} - 1)10^3$ V/m. Vật nặng m = 100g được tích điện đến điện tích $q = -10^{-3}C$.



Xác định vị trí cân bằng mới của con lắc và tính chu kì dao động nhỏ của nó ? Cho $g = 10\ m/s^2$ và sự có mặt của vectơ $\vec{E}$ không ảnh hưởng đến vectơ $\vec{F}_n$.

(HỌC VIỆN KĨ THUẬT QUÂN SỰ – 1998)

Giải

1. *Phương dây treo khi con lắc cân bằng và chu kì :*

+ Lúc cân bằng dây treo con lắc hợp với phương thẳng đứng góc α cho bởi : $tg\alpha = \frac{F_n}{P} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^0$

+ Trọng lực biểu kiến tác dụng vào con lắc : $\vec{P'} = \vec{P} + \vec{F}_n$

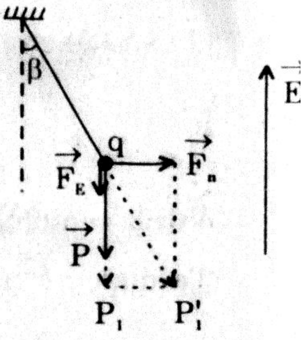
với $P = P\sqrt{2} = mg\sqrt{2}$

Gia tốc biểu kiến mà con lắc phải chịu :

$$g = \frac{P'}{m} = \frac{mg\sqrt{2}}{m} = g\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\ (m/s^2)$$

Chu kì dao động bé :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10\sqrt{2}}} = 1,67\ (s).$$



2. Vì $\vec{E}$ hướng lên và $q < 0$ nên con lắc chịu thêm lực điện trường $\vec{F}_E$ hướng xuống và có độ lớn :

$$F_E = |q|E$$

+ Dây treo con lắc hợp với phương thẳng đứng góc β mà :

$$tg\beta = \frac{F_n}{P + F_E} = \frac{mg}{mg + |q|E} = \frac{0,1 \times 10}{0,1 . 10 + 10^{-3}(\sqrt{3} - 1).10^3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = 30^0$$

+ Trọng lực biểu kiến : $P'_1 = \dfrac{F_n}{\sin\beta} = \dfrac{0,1 \times 10}{\frac{1}{2}} = 2\,(N)$

Gia tốc biểu kiến : $g'_1 = \dfrac{P'_1}{m} = \dfrac{2}{0,1} = 20\ (m/s^2)$

Chu kì : $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g'_1}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{20}} = 1,404...$

$$T_1 \approx 1,4\ (s).$$

Chương V

SÓNG CƠ HỌC – ÂM HỌC

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Các đại lượng đặc trưng của sóng*

- *Vận tốc truyền sóng* V là vận tốc truyền biến dạng, phụ thuộc vào môi trường truyền sóng :

$$V = \frac{d}{\Delta t} \quad \begin{cases} d \text{ là quãng đường biến dạng} \\ t \text{ là thời gian} \end{cases}$$

- *Tần số sóng f :* là tần số dao động của mỗi điểm khi sóng truyền qua và cũng là tần số của nguồn gây nên sóng.

- *Chu kì của sóng :* $\underset{(s)}{T} = \frac{1}{f(Hz)}$

- *Bước sóng λ :* là quãng đường truyền sóng trong một chu kì :

$$\lambda = V.T = \frac{V}{f}$$

2. *Biểu thức sóng tại một điểm*

Nếu biểu thức sóng tại O là : $U_{(O)} = a\sin\frac{2\pi}{T}t$

thì biểu thức sóng tại M cách O khoảng x ($\overline{OM} = x$) là :

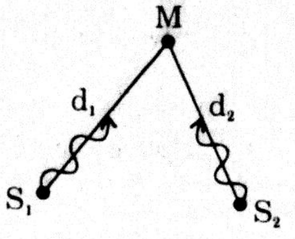
$$U_{(M)} = a\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right) = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

3. *Độ lệch pha giữa hai điểm cách nhau d*

$$\Delta\varphi = 2\pi.\frac{d}{\lambda}$$

4. *Giao thoa sóng cơ*

- Biên độ dao động tổng hợp : $A = 2a\left|\cos\pi\frac{d_1 - d_2}{\lambda}\right|$



- Vị trí điểm M có biên độ dao động cực đại :

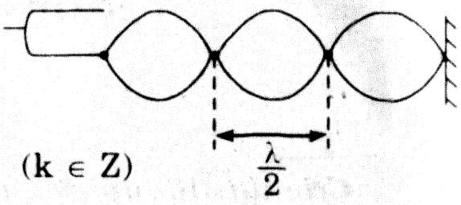
$$d_1 - d_2 = k.\lambda \quad (k \in Z)$$

- Vị trí điểm M có biên độ bằng không :

$$d_1 - d_2 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (k \in Z)$$

5. *Sóng dừng*

- Khoảng cách giữa hai nút (hoặc hai bụng) liên tục : $l = \frac{\lambda}{2}$



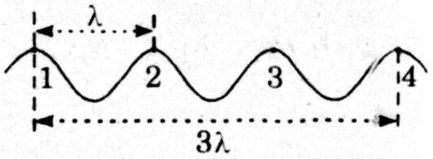
- Điều kiện để có sóng dừng :
  - + Đối với dây có hai đầu cố định : $l = k.\frac{\lambda}{2}$ $(k \in Z)$
  - + Đối với dây có một đầu cố định và một đầu tự do :

$$l = \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad (k \in Z).$$

BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1 : LIÊN HỆ GIỮA GỢN LỒI VÀ BƯỚC SÓNG

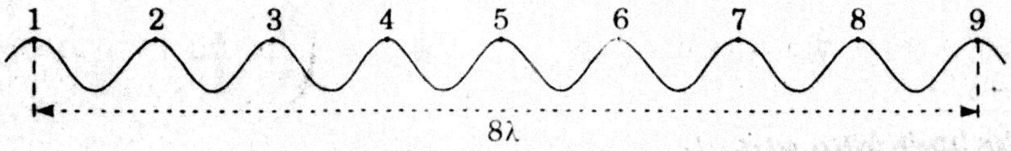
- Khoảng cách giữa hai gợn lồi liên tiếp là bước sóng λ.
- Khoảng cách giữa n gợn lồi liên tiếp là (n – 1).λ



- Bước sóng : $\underset{(m)}{\lambda} = \underset{(m/s)}{V} \;.\; \underset{(s)}{T} = \frac{V(m/s)}{f(Hz)}$

Ví dụ : Một mũi nhọn S chạm vào mặt nước. Khi S dao động với tần số 50Hz nó tạo ra trên mặt nước một sóng. Khoảng cách giữa 9 gợn lồi liên tiếp là 6,4cm. Tính vận tốc truyền sóng.

Giải



Khoảng cách giữa 9 gợn lồi liên tục là 8λ, vậy :

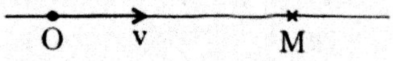
$$\lambda = \frac{6,4\text{cm}}{8} = 0,8\text{cm} \qquad \text{mà : } \lambda = \frac{V}{f}$$

$$\Rightarrow \quad V = \lambda.f = 0,8 \times 50 = 40 \text{ (cm/s)}.$$

Dạng 2 : VIẾT PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG (SÓNG) TẠI MỘT ĐIỂM

- Viết phương trình dao động tại nguồn O :

$$U_{(O)} = a\sin 2\pi f.t$$



- Phương trình dao động tại M cách O khoảng x :

$$U_{(M)} = a\sin 2\pi f\left(t - \frac{x}{V}\right) = a\sin 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Ví dụ : Một mũi nhọn S chạm vào mặt nước, khi S dao động với tần số $f = 100Hz$ nó sẽ tạo ra trên mặt nước một sóng có biên độ 5mm, bước sóng $\lambda = 0,8cm$.

Viết phương trình dao động tại M nằm trên mặt nước cách nguồn S khoảng 5,2cm, cho rằng biên độ sóng không đổi.

Giải

- Phương trình dao động của S có dạng : $U_{(s)} = a\sin(2\pi ft + \varphi)$

  Chọn t = 0 là lúc mũi nhọn S qua vị trí cân bằng theo chiều dương

  $$U_{(s)} = 0 \quad \text{và} \quad \frac{du}{dt} = u' > 0$$

  $$\text{Có : } \begin{cases} 0 = a\sin\varphi \\ u' = a.2\pi f\cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

  Vậy : $U_{(s)} = a\sin 2\pi ft$ (mm).

- Phương trình dao động tại M :

  $$U = a\sin 2\pi f\left(t - \frac{SM}{V}\right) = a\sin 2\pi\left(ft - \frac{SM}{\frac{V}{f}}\right)$$

  $$= a\sin 2\pi\left(ft - \frac{SM}{\lambda}\right) \quad \text{vì } \lambda = \frac{V}{f}$$

  $$= 5\sin 2\pi\left(100t - \frac{5,2}{0,8}\right) = 5\sin(200\pi t - 13\pi)$$

  $$= 5\sin(200\pi t - \pi) \text{ (mm)}$$

Dạng 3 : HÌNH DẠNG CỦA DÂY CÓ SÓNG NGANG VÀO THỜI ĐIỂM ĐÃ BIẾT

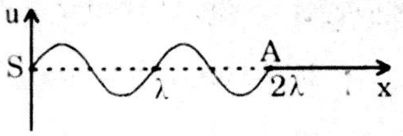
- Tìm khoảng cách mà sóng đã truyền từ nguồn S (lúc t = 0) đến lúc t_0 :

  $$SA = V.t_0$$

- Viết phương trình dao động trên dây vào lúc t_0 :

  $$U = a\sin 2\pi\left(ft_0 - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{với} \quad 0 \le x \le SA$$

- Vẽ đồ thị của U theo x với $0 \le x \le SA$: đó là một đường sin có chu kì là bước sóng λ. (Đoạn dây ngoài SA vẫn thẳng vì lúc t_0 sóng chưa truyền tới)

  Đó chính là dạng của dây vào lúc t_0.

Ví dụ : Tại đầu O của dây đàn hồi tạo ra một dao động theo phương vuông góc với dây.

Phương trình dao động tại O là : $U_{(O)} = 5\sin 200\pi t$ (cm)

Vận tốc truyền sóng trên dây là : V = 50m/s.

Xác định dạng của dây vào lúc $t = \frac{2}{100}$ s.

Giải

+ $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{200\pi} = \frac{1}{100}\text{(s)}$$

+ Khoảng cách mà sóng truyền từ lúc t = 0 đến $t = \frac{2}{100}$ s là :

$$OA = V.t = 50.\frac{2}{100} = 1\text{ (m)}$$

+ Phương trình dao động tại điểm M (với OM = x) trên OA lúc $t = \frac{2}{100}$ s

là : $U = a\sin 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) = a\sin\left(2\pi ft - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$

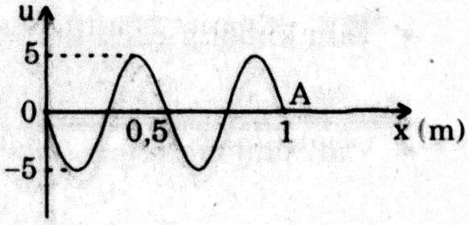
với $\begin{cases} \bullet\ 2\pi f = \omega = 200\pi \text{ (rad/s)} \\ \bullet\ t = \frac{2}{100}\text{(s)} \\ \bullet\ \lambda = V.T = 50.0{,}01 = 0{,}5\text{m} \end{cases}$

$$U = 5\sin\left(200\pi.\frac{2}{100} - \frac{2\pi x}{0,5}\right) = 5\sin\left(4\pi - \frac{2\pi x}{0,5}\right) = -5\sin\frac{2\pi x}{0,5}\text{ ((cm)}$$

với $0 \leq x \leq OA = 1$m.

+ Đồ thị là 1 đường sin qua O có chu kì $\lambda = 0{,}5$ (m)

Dạng của dây vào lúc $t = \frac{2}{100}$ s gồm có một phần là đường sin OA và ngoài OA là đường thẳng.

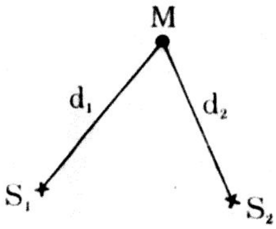


Dạng 4 : BIỂU THỨC SÓNG TỔNG HỢP TẠI MỘT ĐIỂM

- Biểu thức dao động của 2 nguồn kết hợp : $U_{S_1} = U_{S_2} = a\sin 2\pi ft$
- Biểu thức sóng tại M do mỗi nguồn truyền tới :

$$u_1 = a\sin 2\pi\left(ft - \frac{d_1}{\lambda}\right)$$

$$u_2 = a\sin 2\pi\left(ft - \frac{d_2}{\lambda}\right)$$



- Nếu 2 dao động trên tại M cùng phương thì biểu thức sóng tổng hợp tại M : $u = u_1 + u_2$

$$\mathbf{u = 2a\cos\pi\frac{d_1 - d_2}{\lambda}\sin\left(2\pi ft - \pi\frac{d_1 + d_2}{\lambda}\right)}$$

Ví dụ : Tại 2 điểm S_1, S_2 trên mặt chất lỏng ta gây những dao động hình sin theo phương thẳng đứng có cùng biên độ a, cùng chu kì T và có pha ban đầu bằng không. Cho rằng quá trình truyền sóng không mất năng lượng, vận tốc truyền sóng trong chất lỏng là V.

a) Viết phương trình dao động tổng hợp tại M trên mặt chất lỏng cách S_1 khoảng d_1 và cách S_2 khoảng d_2.

b) Tìm biên độ và pha ban đầu tại điểm M_1 có $d_1 = 12{,}5\text{cm}$, $d_2 = 10\text{cm}$ và điểm M_2 có $d_1' = 20\text{cm}$, $d_2' = 10\text{cm}$.

Biết a = 5cm, V = 1m/s. T = 0,1s.

Giải

a) *Phương trình dao động tổng hợp tại **M** :*

- Theo đề : $U_{S_1} = U_{S_2} = a\sin 2\pi\frac{t}{T}$
- Dao động tại M do S_1 truyền tới :

$$u_1 = a\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{d_1}{V}\right) = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right) \quad \text{với } \lambda = V.T$$

- Dao động tại M do S_2 truyền tới :

$$u_2 = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right)$$

- Vì 2 dao động trên cùng phương nên dao động tổng hợp tại **M** :

$$u = u_1 + u_2 = a\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right)\right]$$

Áp dụng : $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$, tạ được :

$$u = 2a\cos\pi\frac{d_1 - d_2}{\lambda}.\sin\left(2\pi\frac{t}{T} - \pi\frac{d_1 + d_2}{\lambda}\right) \qquad (*)$$

b) Biên độ và pha ban đầu :

- **Tại M_1 ($d_1 = 12,5cm$, $d_2 = 10cm$)**

$$(*) \Rightarrow u_{(M_1)} = 2 \times 5 \cos \pi \frac{12,5 - 10}{10} \sin\left(2\pi \frac{t}{0,1} - \pi \frac{12,5 + 10}{10}\right)$$

$$= 10\cos(0,25\pi).\sin(20\pi t - 2,5\pi) = 5\sqrt{2}.\sin\left(20\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy : $A_1 = 5\sqrt{2}$ (cm) ; $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$

- **Tại M_2 ($d'_1 = 20cm$, $d'_2 = 10cm$)**

$$(*) \Rightarrow u_{(M_2)} = 2 \times 5 \cos \pi \frac{20 - 10}{10} \sin\left(2\pi \frac{t}{0,1} - \pi \frac{20 + 10}{10}\right)$$

$$= 10\cos\pi.\sin(20\pi t - 3\pi) = -10\sin(20\pi t - \pi) = 10\sin 20\pi t \text{ (cm)}$$

Vậy : $A_2 = 10$ (cm) ; $\varphi_2 = 0$.

Dạng 5 : QUỸ TÍCH CÁC ĐIỂM CÓ BIÊN ĐỘ DAO ĐỘNG TỔNG HỢP CỰC ĐẠI VÀ BẰNG KHÔNG

- **Biên độ dao động tổng hợp :** $A = a\left|\cos \pi \frac{d_1 - d_2}{\lambda}\right|$

- **Vị trí điểm M có biên độ cực đại :**

$$\left|\cos \pi \frac{d_1 - d_2}{\lambda}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad d_1 - d_2 = k\lambda$$

- **Vị trí điểm M có biên độ bằng không :**

$$\cos \pi \frac{d_1 - d_2}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_1 - d_2 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$$

Ví dụ : **Tại 2 điểm O_1 và O_2 trên mặt chất lỏng ta gây 2 dao động giống nhau và cùng vuông góc với mặt chất lỏng : $U_{01} = U_{02} = a\sin\omega t$**

Xác định vị trí điểm M trên mặt chất lỏng có biên độ dao động tổng hợp do 2 sóng từ O_1 và O_2 truyền tới có giá trị cực đại và có biên độ bằng không. Biết bước sóng là λ.

Vẽ dạng của tập hợp các điểm M có biên độ cực đại hoặc bằng không.

Giải

Biểu thức sóng tổng hợp tại M :

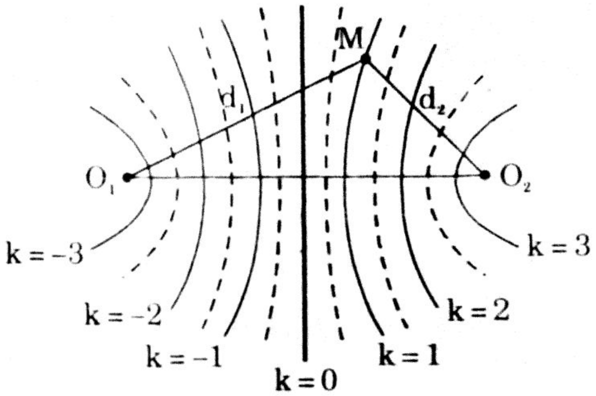
$$u = 2a \cos \pi \frac{d_1 - d_2}{\lambda}.\sin\left(\omega t - \pi \frac{d_1 + d_2}{\lambda}\right)$$

Biên độ dao động : $A = 2a\left|\cos\pi\dfrac{d_1 - d_2}{\lambda}\right|$

- Biên độ cực đại : $\left|\cos\pi\dfrac{d_1 - d_2}{\lambda}\right| = 1 \Leftrightarrow \pi\dfrac{d_1 - d_2}{\lambda} = k\pi$ với $k \in Z$

$$\Leftrightarrow \quad d_1 - d_2 = k\lambda \qquad (1)$$

Tập hợp các điểm **M** thỏa mãn hệ thức (1) là **một** họ **đường** hyperbol nhận O_1 và O_2 làm tiêu điểm trong đó có một đường là trung **trực** của O_1O_2 (ứng với $k = 0$) trên mặt chất lỏng đó là các **gợn sóng.**



- Biên độ bằng **không** :

$$\cos\pi\frac{d_1 - d_2}{\lambda} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi\frac{d_1 - d_2}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad d_1 - d_2 = (2k + 1)\frac{1}{2} \quad (k \in Z) \qquad (2)$$

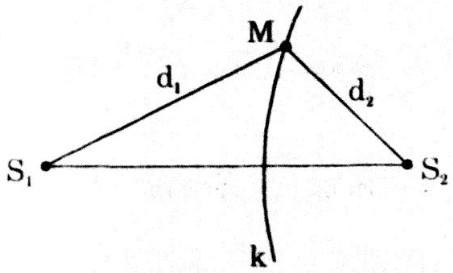
Tập hợp các **điểm M thỏa mãn** hệ thức (2) là một họ **đường cong** cũng nhận O_1 và O_2 **làm tiêu điểm.** Trên mặt chất lỏng đó là **những** đường tại đó chất lỏng **nằm yên.**

Dạng 6 : XÁC ĐỊNH SỐ GỢN SÓNG

$$\begin{cases} d_1 - d_2 = k\lambda \quad (k \in Z) \\ |d_1 - d_2| \le S_1S_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |k| \le \frac{S_1S_2}{\lambda}$$

$\Rightarrow$ Số giá trị $k \in Z$: đó là số gợn sóng



Ví dụ : Hai mũi **nhọn** S_1, S_2 **cách** nhau a = 10cm **chạm vào mặt** nước và cùng dao **động với tần số** f = 50Hz. Vận tốc truyền **sóng là V** = 40cm/s. Tính tổng số **gợn** lồi giữa S_1, S_2.

Giải

Điểm M nằm trên **gợn lồi thỏa** mãn hệ thức : $d_1 - d_2 = k\lambda \quad (k \in Z)$

Mặt khác : $|d_1 - d_2| \le S_1S_2 = a$ hay $|k\lambda| \le a \quad \Rightarrow \quad |k| \le \dfrac{a}{\lambda}$

Với $\lambda = \dfrac{V}{f} = \dfrac{40}{50} = 0{,}8$ (cm/s)

Nên : $|k| \le \frac{10}{0,8} = 12,5 \Leftrightarrow k = -12, ..., 0, ..., 12$

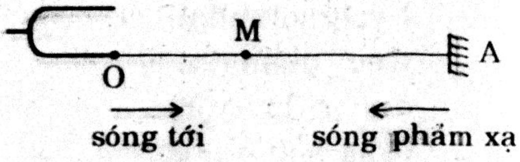
Vậy có tất cả 25 gợn lồi.

Dạng 7 : CÁCH THÀNH LẬP PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG TỔNG HỢP CỦA SÓNG TỚI VÀ SÓNG PHẢN XẠ

- Sóng tới tại M : U_M
- Sóng tới tại A : U_A
- Sóng phản xạ tại A : U'_A

mà : $U'_A + U_A = 0 \Rightarrow U'_A = -U_A$

- Sóng phản xạ tại M : U'_M
- Sóng tổng hợp tại M : $U = U_M + U'_M$



Ví dụ : Sợi dây OA = l = 64cm, đầu O gắn vào âm thoa rung với biên độ a = 0,75cm, tần số f = 250Hz.

Phương trình dao động đầu O là $u = a\sin 2\pi ft$.

Vận tốc truyền sóng V = 80m/s.

Viết phương trình dao động tổng hợp tại M cách đầu A khoảng x do sóng tới và sóng phản xạ tại đầu cố định A gây ra.

Giải

- Sóng tới tại M : $U_M = a\sin 2\pi\left(ft - \frac{l - x}{\lambda}\right)$
- Sóng tới tại A : $U_A = a\sin 2\pi\left(ft - \frac{l}{\lambda}\right)$
- Gọi sóng phản xạ tại A là U'_A thì : $U'_A + U_A = 0$ (vì A cố định)

$$\Rightarrow U'_A = -U_A = -a\sin 2\pi\left(ft - \frac{l}{\lambda}\right)$$

- Sóng phản xạ tại M :

$$U'_M = -a\sin 2\pi\left[f\left(t - \frac{x}{V}\right) - \frac{l}{\lambda}\right] = -a\sin 2\pi\left(ft - \frac{l + x}{\lambda}\right)$$

- Sóng tổng hợp tại M :

$$U = U_M + U'_M = a\left[\sin 2\pi\left(ft - \frac{l - x}{\lambda}\right) - \sin 2\pi\left(ft - \frac{l + x}{\lambda}\right)\right]$$

Áp dụng : $\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}.\cos\dfrac{p+q}{2}$ ta được :

$$U = 2a\sin\frac{2\pi x}{\lambda}.\cos 2\pi\left(ft - \frac{l}{\lambda}\right)$$

Áp dụng số : $\lambda = \dfrac{V}{f} = \dfrac{80}{250} = 0{,}32\ (m) = 32\ (cm)$

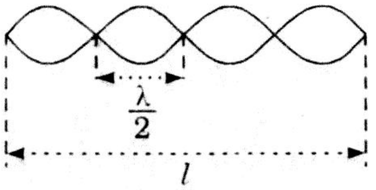
$$U = 2\times 0{,}75\sin\frac{2\pi x}{32}\cos 2\pi\left(250t - \frac{64}{32}\right) = 1{,}5\sin\frac{\pi x}{32}\cos 500\pi t\ (cm)$$

Với x : tính bằng cm; t tính bằng s.

Dạng 8 : TÌM SỐ NÚT VÀ SỐ BỤNG KHI CÓ SÓNG DỪNG ỔN ĐỊNH.

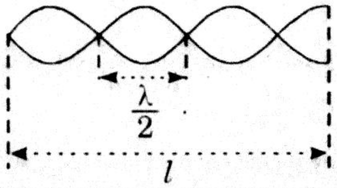
a) Hai đầu cố định

$$l = k\frac{\lambda}{2}\quad\begin{cases}k \text{ bụng}\\(k+1)\text{ nút}\end{cases}$$



b) Một đầu cố định, một đầu tự do

$$l = \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}\quad\begin{cases}k \text{ bụng}\\k \text{ nút}\end{cases}$$



Ví dụ 1 : Một dây cao su căng thẳng giữa 2 điểm A, B với AB = 5m. Đầu A gắn vào âm thoa dao động với tần số f = 2Hz, còn đầu B giữ cố định, vận tốc truyền sóng trên dây là V = 5m/s. Định số nút và bụng sóng thấy được trên dây.

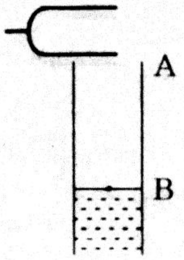
Giải

+ Bước sóng : $\lambda = \dfrac{V}{f} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5\ (m)$

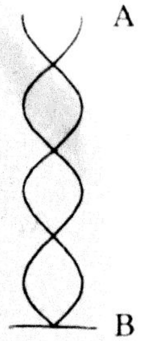
+ Hai đầu là 2 nút nên : $l = k\dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow k = \dfrac{2l}{\lambda} = \dfrac{2\times 5}{2{,}5} = 4$

Vậy có 4 bụng sóng và 5 nút sóng.

Ví dụ 2 : Một âm thoa đặt trên miệng một ống khí hình trụ AB chiều dài AB = l = 87,5cm (B nằm tại mặt chất lỏng chứa trong ống – hình vẽ). Khi âm thoa dao động với tần số f = 680Hz thì tại A có 1 bụng sóng và tại B có 1 nút sóng. Tìm số bụng sống và nút sóng giữa A và B, biết vận tốc truyền sóng trong không khí là V = 340m/s.



Giải



- Bước sóng : $\lambda = \frac{V}{f} = \frac{340}{680} = 0{,}5\ (\mathrm{m}) = 50\ (\mathrm{cm})$
- A là bụng B là nút nên :

$$l = \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad k - \frac{1}{2} = \frac{2l}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{2l}{\lambda} + \frac{1}{2} = \frac{2.87{,}5}{50} + \frac{1}{2} = 4$$

Vậy có tất cả 4 bụng sóng và 4 nút sóng, còn giữa A, B có 3 bụng sóng và 3 nút sóng (không kể bụng A và nút ở B).

ĐỀ THI

5.1 Hai nguồn âm O_1, O_2 coi như hai nguồn điểm cách nhau 4m là hai nguồn phát sóng kết hợp cùng tần số 425Hz, cùng biên độ 1cm, cùng pha ban đầu bằng không. Vận tốc truyền âm trong không khí là 340m/s. Coi biên độ sóng không đổi.

1. Tìm phương trình dao động của một điểm bất kì trên đoạn thẳng nối O_1O_2.

2. Tìm công thức xác định vị trí các điểm dao động với biên độ 2cm. Có bao nhiêu điểm như vậy (trừ hai điểm O_1, O_2) ?

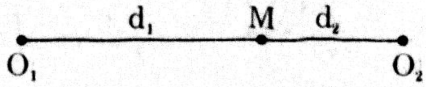
(ĐH GIAO THÔNG VẬN TẢI – HÀ NỘI – 7/97)

Giải

1. ***Phương trình dao động của một điểm trên O_1O_2 :***

Theo đề : $U_{01} = U_{02} = a\sin 2\pi ft$

Biểu thức dao động tại M từ O_1 truyền tới :



$$U_1 = a\sin 2\pi t\left(t - \frac{d_2}{V}\right)$$

$$= a\sin 2\pi\left(ft - \frac{d_1}{\lambda}\right) \quad \text{với} \quad \lambda = \frac{V}{f} = \frac{340}{425} = 0{,}8\ (\mathrm{m})$$

Biểu thức dao động tại M từ O_2 truyền tới : $U_2 = a\sin 2\pi\left(ft - \frac{d_2}{\lambda}\right)$

Biểu thức dao động tổng hợp tại M :

$$U = U_1 + U_2 = a\left[\sin 2\pi\left(ft - \frac{d_1}{\lambda}\right) + \sin 2\pi\left(ft - \frac{d_2}{\lambda}\right)\right]$$

Áp dụng : $\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}.\cos\dfrac{p-q}{2}$, ta được :

$$u = 2a\cos\pi\frac{d_1 - d_2}{\lambda}.\sin\left(2\pi ft - \pi\frac{d_1 + d}{\lambda}\right)$$

$$= 2a\cos\pi\frac{d_1 - d_2}{0,8}.\sin\left(850\pi t - \pi\frac{d_1 + d_2}{0,8}\right) \text{ (cm)}$$

trong đó d_1 và d_2 tính bằng mét (m).

2. *Vị trí các điểm có biên độ 2cm :*

Biên độ dao động tại M :

$$A = 2\left|\cos\pi\frac{d_1 - d_2}{0,8}\right| = 2 \text{ (cm)} \quad \Rightarrow \quad \left|\cos\pi\frac{d_1 - d_2}{0,8}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi\frac{d_1 - d_2}{0,8} = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad d_1 - d_2 = 0,8k \text{ (m)} \qquad (1)$$

Vì $M \in O_1O_2$ nên : $d_1 + d_2 = 4$ (m) (2)

Cộng (1) và (2) : $2d_1 = 0,8k + 4 \Rightarrow d_1 = 0,4k + 2$ (m)

Có : $0 < d_1 = 2 + 0,4k < 4 \Rightarrow -2 < 0,4k < 2$

$\Leftrightarrow -5 < k < 5$ (có 9 giá trị k)

Vậy có tất cả 9 điểm trên O_1O_2 có biên độ 2cm được xác định bởi :

$$d_1 = O_1M = 2 + 0,4k \text{ (m)} \quad \text{với} \quad -5 < k < 5.$$

5.2 Trên mặt thoáng một chất lỏng có hai nguồn kết hợp A và B cách nhau 20cm, phương trình dao động tại A và B là :

$U_A = U_B = \sin 100\pi t$cm, vận tốc truyền sóng là 4m/s.

1. Tìm biên độ và pha ban đầu của sóng tạo ra tại trung điểm O của AB.

2. Gọi M là một điểm trên đường trung trực của AB, cách O một đoạn x. Tính x để M dao động cùng pha với các nguồn A, B.

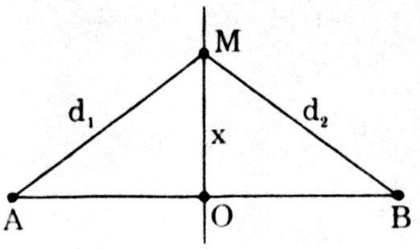
(ĐH HUẾ – 7/97)

Giải

1. *Biên độ và pha ban đầu của sóng tại trung điểm O :*

Biểu thức dao động tổng hợp tại một điểm bất kì trên mặt chất lỏng :

$$u = 2a\cos\pi\frac{d_1 - d_2}{\lambda}.\sin\left(\omega t - \pi\frac{d_1 + d_2}{\lambda}\right)$$



Tại O : $\begin{cases} d_1 - d_2 = 0 \\ d_1 + d_2 = AB = 20\text{cm} \end{cases}$

và $$\lambda = \frac{V}{f} = \frac{400}{50} = 8 \text{ (cm)}$$

nên : $$u_{(0)} = 2a\cos 0.\sin\left(100\pi t - \pi\frac{20}{8}\right) = 2\sin(100\pi t - 2{,}5\pi)$$

$$= 2\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (cm)}$$

Vậy : $A = 2$ (cm) ; $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

2. *Giá trị x :*

- Tại M : $$\begin{cases} d_1 + d_2 = 2d_1 \text{ nên:} \\ d_1 = d_2 = \sqrt{x^2 + 10^2} \text{ (cm)} \end{cases}$$

nên : $$u = 2a\cos 0.\sin\left(100\pi t - \pi\frac{2d_1}{\lambda}\right) = 2\sin\left(100\pi t - 2\pi\frac{d_1}{\lambda}\right)$$

- Vì M và A dao động cùng pha nên độ lệch pha giữa chúng là :

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{d_1}{\lambda} = 2k\pi \qquad (k \in Z) \quad \Rightarrow \quad d_1 = k\lambda$$

$$\sqrt{x^2 + 10^2} = 8k \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{64k^2 - 100} \text{ (cm)} \quad \text{với } k \geq 2.$$

5.3 Trên mặt nước rộng vô hạn có hai nguồn sóng kết hợp S_1, S_2 cách nhau một khoảng *l*, chúng phát ra hai sóng có cùng phương trình $u = A\sin\omega t$; sóng không tắt dần và có bước sóng λ. Gọi M là điểm cách các nguồn các khoảng d_1, d_2.

1. Viết các phương trình sóng tại M do S_1, S_2 truyền đến. Từ đó tổng hợp thành phương trình sóng quan sát được ở M.

2. Xác định vị trí các bụng và các nút trên mặt nước của sóng tổng hợp.

3. Cho $S_1S_2 = 10{,}75\lambda$. Gọi H là trung điểm của S_1S_2. Chọn H làm mốc, hãy xác định tọa độ bụng và nút trên đoạn S_1S_2.

4. Có bao nhiêu bụng, nút của sóng trên S_1S_2. Bản thân S_1, S_2 là bụng hay nút của sóng tổng hợp ? ($S_1S_2 = 10{,}75\lambda$).

(ĐH DÂN LẬP THĂNG LONG – 96)

Giải vắn tắt

1. $$u_1 = A\sin\left(\omega t - 2\pi\frac{d_1}{\lambda}\right); \qquad u_2 = A\sin\left(\omega t - 2\pi\frac{d_2}{\lambda}\right)$$

$$u = u_1 + u_2 = 2A\cos\pi\frac{d_1 - d_2}{\lambda}\sin\left(\omega t - \pi\frac{d_1 + d_2}{\lambda}\right).$$

2. Biên độ : $2A\left|\cos\pi\frac{d_1-d_2}{\lambda}\right|$

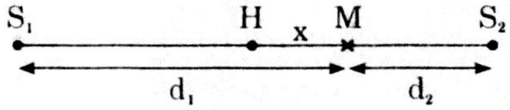
- Bụng sóng : $\left|\cos\pi\frac{d_1-d_2}{\lambda}\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad d_1 - d_2 = k\lambda \quad (\text{với } k \in Z)$

  Biểu thức này chứng tỏ các bụng sóng nằm trên các nhánh của một họ các đường hyperbol nhận S_1 và S_2 làm tiêu điểm.

- Nút sóng : $\cos\pi\frac{d_1-d_2}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_1 - d_2 = (2k'+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k' \in Z)$

  Biểu thức này cũng chứng tỏ các nút sóng nằm trên các nhánh của một họ các đường hyperbol nhận S_1 và S_2 làm tiêu điểm. Các đường này nằm xen kẽ với các đường chứa các bụng sóng.

3.• M là bụng sóng : $\begin{cases} d_1 - d_2 = k\lambda \\ d_1 + d_2 = 10{,}75\lambda \end{cases}$



$$\Rightarrow \quad d_1 = \frac{k\lambda}{2} + 5{,}375\lambda$$

Với $d_1 = 5{,}375\lambda + x \begin{cases} x \geq 0 \text{ nếu } M \in HS_2 \\ x \leq 0 \text{ nếu } M \in HS_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = k\frac{\lambda}{2}$

Với : $-5{,}375\lambda \leq x = k\frac{\lambda}{2} \leq 5{,}375\lambda \quad \Rightarrow \quad -10{,}75 \leq k \leq 10{,}75 \qquad (1)$

- M là nút sóng : $\begin{cases} d_1 - d_2 = (2k'+1)\frac{\lambda}{2} \\ d_1 + d_2 = 10{,}75\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow \quad d_1 = k'\frac{\lambda}{2} + 0{,}25\lambda$

Với : $-5{,}375\lambda \leq x = k'\frac{\lambda}{2} + 0{,}25\lambda \leq 5{,}375\lambda \quad \Rightarrow \quad -11{,}25 \leq k' \leq 10{,}25 \qquad (2)$

4.• Biểu thức (1) chứng tỏ có tất cả 21 bụng sóng

(2) chứng tỏ có tất cả 22 nút

- Thay $x = \pm 5{,}375\lambda$ lần lượt vào 2 biểu thức : $x = k\frac{\lambda}{2}$ và $x = k'\frac{\lambda}{2} + 0{,}25\lambda$

  ta đều thấy k và k' đều không nguyên. Vậy S_1 và S_2 không phải là bụng và nút sóng.

5.4 Cho 2 nguồn kết hợp S_1, S_2 giống hệt nhau cách nhau 5cm. Nếu sóng do 2 nguồn này tạo ra có bước sóng $\lambda = 2$cm thì trên đoạn S_1S_2 có thể quan sát được bao nhiêu cực đại giao thoa (không kể hai vị trí S_1, S_2 của 2 nguồn). Nếu tần số dao động của mỗi nguồn giảm đi hai lần (vận tốc truyền sóng không đổi) thì kết quả sẽ thế nào.

(ĐH HÀNG HẢI - 98)

Giải

Gọi M là giao điểm của gợn lồi với S_1S_2 với $S_1M = d_1$; $S_2M = d_2$.

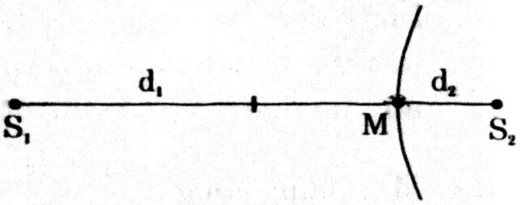
M nằm trên gợn lồi (biên độ dao động cực đại) nên :

$$d_1 - d_2 = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (1)$$

Mặt khác M nằm trên S_1S_2 nên : $d_1 + d_2 = S_1S_2$ (2)

Cộng (1) và (2) : $2d_1 = k\lambda + S_1S_2 \Rightarrow d_1 = k\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{S_1S_2}{2}$

Với $0 < d_1 < S_1S_2$:



$$0 < k\frac{\lambda}{2} + \frac{S_1S_2}{2} < S_1S_2$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{S_1S_2}{2} < k\frac{\lambda}{2} < \frac{S_1S_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{S_1S_2}{\lambda} < k < \frac{S_1S_2}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2} < k < \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -2,5 < k < 2,5 \quad \Rightarrow \quad k = -2, \ldots, 2 \text{ (5 giá trị)}$$

Vậy trên đoạn S_1S_2 quan sát được 5 cực đại giao thoa.

- Nếu tần số giảm đi 2 lần thì λ tăng 2 lần tức $\lambda = 4cm$.

Vậy : $-\dfrac{5}{4} < k < \dfrac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -1,25 < k < 1,25$

$\Rightarrow k = -1, 0, 1$: giữa S_1, S_2 ta quan sát được 3 cực đại giao thoa.

5.5 Hai nguồn sóng kết hợp A và B trên mặt nước rộng được thực hiện bởi một âm thoa dao động với tần số f. Coi biên độ sóng tại một điểm bất kì trên phương truyền sóng bằng biên độ dao động của nguồn sóng là a.

1. Khoảng cách giữa 2 ngọn sóng liên tiếp do mỗi nguồn tạo ra là 2mm, vận tốc truyền sóng là V = 0,9m/s. Tính tần số f của sóng.

2. Gọi M_1 và M_2 là 2 điểm trên mặt nước mà khoảng cách tới hai nguồn A và B là $M_1A = d_1 = 3,5cm$; $M_1B = d'_1 = 6,9cm$ và $M_2A = d_2 = 3cm$; $M_2B = d'_2 = 6,5cm$. Xác định biên độ dao động của M_1 và M_2.

3. Khoảng cách giữa hai nguồn sóng AB = 4cm, hãy tính số gợn sóng quan sát được trên đoạn thẳng AB.

(ĐH THỦY SẢN – 98)

Giải vắn tắt

1. $f = \dfrac{V}{\lambda} = 45$ (Hz) $\quad (\lambda = 2mm)$.

2. $d'_1 - d_1 = 2,5\lambda$: $A_{M_1} = 0$ (M_1 đứng yên)

$d'_2 - d_2 = 2\lambda$: $A_{M_2} = 2a$ (M_2 dao động mạnh).

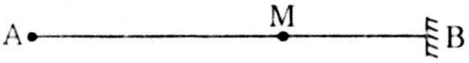
3. $-\dfrac{AB}{\lambda} < k < \dfrac{AB}{\lambda}$ (không kể ở A và B)

$-20 < k < 20$:   39 gợn trên AB.

5.6 Một sợi dây mảnh AB không dãn chiều dài l, đầu B cố định, đầu A dao động (hình vẽ).

Phương trình dao động đầu A là : $U_A = U_0\sin\omega t$ với $\omega = 2\pi t$, U_A và U_0 là li độ và biên độ dao động (có phương dao động vuông góc với dây).

1. Viết phương trình dao động tại M cách A khoảng **x** do sự giao thoa của sóng tới và sóng phản xạ; biết rằng tốc độ truyền sóng trên dây là V. Coi biên độ dao động U_0 là không giảm trên dây, các điểm A, B là những điểm nút.



2. Tìm điều kiện để trên dây có sóng dừng.

3. Cho biết $l = 1,2$m; f = 100Hz, tốc độ truyền sóng trên dây là 40m/s, biên độ dao động $U_0 = 1,5$cm.

a) Trên dây có sóng dừng không ? Nếu có hãy xác định số các điểm nút và điểm bụng trên dây.

b) Xác định bề rộng của một bụng sóng và tốc độ dao động cực đại của bụng sóng.

c) Nếu muốn trên dây có 12 bụng sóng thì tần số **f** phải là bao nhiêu ?

(HỌC VIỆN QUAN HỆ QUỐC TẾ - 98)

Giải

1. *Phương trình dao động tại M :*

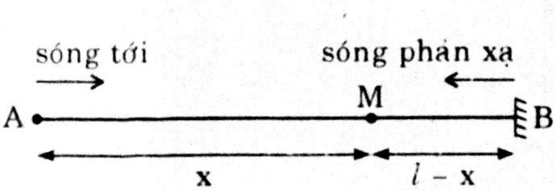
+ Sóng tới tại M : $U_{1M} = U_0\sin\omega\left(t - \dfrac{x}{V}\right) = U_0\sin2\pi\left(ft - \dfrac{x}{\lambda}\right)$

+ Sóng tới tại B : $U_{1B} = U_0\sin2\pi\left(ft - \dfrac{l}{\lambda}\right)$

+ Gọi U_{2B} là sóng phản xạ tại B thì :

$U_{1B} + U_{2B} = 0$ (vì B cố định)

$\Rightarrow U_{2B} = -U_{1B} = -U_0\sin2\pi\left(ft - \dfrac{l}{\lambda}\right)$



+ Sóng phản xạ tại M trễ pha hơn sóng phản xạ tại B lượng $2\pi\dfrac{l - x}{\lambda}$

nên biểu thức sóng phản xạ tại M là :

$$U_{2M} = -U_0\sin\left(2\pi ft - 2\pi\frac{l}{\lambda} - 2\pi\frac{l-x}{\lambda}\right) = -U_0\sin\left(2\pi ft - 2\pi\frac{2l-x}{\lambda}\right)$$

+ Sóng tổng hợp tại M :

$$U = U_{1M} + U_{2M} = U_0\left[\sin 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) - \sin 2\pi\left(ft - \frac{2l-x}{\lambda}\right)\right]$$

Áp dụng : $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}.\cos\frac{a+b}{2}$ ta được :

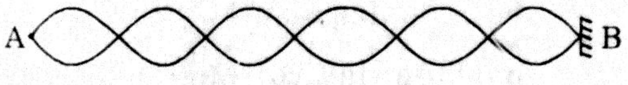
$$U = 2U_0\sin 2\pi\frac{l-x}{\lambda}.\cos 2\pi\left(ft - \frac{l}{\lambda}\right).$$

2. ***Điều kiện để có sóng dừng trên dây :***

Khi có sóng dừng ổn định trên dây thì : A và B là 2 nút và khoảng cách 2 nút liên tục là $\frac{\lambda}{2}$, vậy chiều dài dây l thỏa : $l = k\frac{\lambda}{2}$ $(k \in Z)$.

3.a) Số các nút sóng và bụng sóng :

- $\lambda = \frac{V}{f} = \frac{40}{100} = 0{,}4$ (m)



$l = 1{,}2\text{m} = 3\lambda = 6.\frac{\lambda}{2}$. Vậy trên dây có sóng dừng.

- Dây chứa tất cả 6 khoảng $\frac{\lambda}{2}$, mà mỗi khoảng $\frac{\lambda}{2}$ có 1 bụng sóng, vậy 6 khoảng có 6 bụng sóng vì giữa hai nút sóng là một bụng sóng. Do đó với A, B là 2 nút sóng nên số nút nhiều hơn bụng sóng 1 đơn vị, vậy có tất cả 7 nút sóng.

b) • Bề rộng một bụng sóng là : $(2U_0) \times 2 = 4U_0 = 6$ (cm)

- Phương trình dao động (theo phương u) có dạng : $U = A\cos 2\pi\left(ft - \frac{l}{\lambda}\right)$

$\Rightarrow$ Tốc độ dao động : $U' = \frac{du}{dt} = -2\pi fA\sin 2\pi\left(ft - \frac{l}{\lambda}\right)$

Tốc độ cực đại : $U'_{max} = 2\pi fA$

Đối với bụng sóng thì $A = 2U_0 = 3$ (cm)

Vậy : $U'_{max} = 2\pi.100.3 = 600\pi$ (cm/s) $= 18{,}84$ (m/s).

c) Muốn trên dây có 12 bụng sóng tức số bụng tăng gấp đôi thì bước sóng giảm 2 lần. Muốn vậy tần số f tăng gấp 2 lần tức f = 200 (Hz).

Chương VI

DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU KHÔNG PHÂN NHÁNH

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Trở kháng*

+ Cảm kháng : $Z_L = L\omega$

+ Dung kháng : $Z_C = \dfrac{1}{C.\omega}$

+ Tổng trở : $Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$

2. *Định luật Ôm*

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{U_L}{Z_L} = \frac{U_C}{Z_C} = \frac{U}{Z}$$

3. *Độ lệch pha φ giữa dòng điện tức thời và hiệu điện thế tức thời*

$$tg\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R}$$

- $tg\varphi > 0 \leftrightarrow \varphi > 0$: U sớm pha hơn i
- $tg\varphi < 0 \leftrightarrow \varphi < 0$: U trễ pha hơn i

4. *Biểu thức cường độ dòng điện và hiệu điện thế giữa hai đầu đoạn mạch*

- Nếu $i = I_0\sin\omega t$ thì $u = U_0\sin(\omega t + \varphi)$
- Nếu $u = U_0\sin\omega t$ thì $i = I_0\sin(\omega t - \varphi)$

trong đó φ có thể dương, âm hoặc bằng không.

5. *Công suất của đoạn mạch xoay chiều*

$$P = UI\cos\varphi = RI^2$$

trong đó : $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$ là hệ số công suất đoạn mạch.

6. *Hiện tượng cộng hưởng*

$$I : \text{Max} \Leftrightarrow Z_L = Z_C \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ Z = R \\ \bullet\ I_{max} = \dfrac{U}{R} \\ \bullet\ \varphi = 0 : U \text{ và i cùng pha} \end{cases}$$

BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1 : ĐỊNH LUẬT ÔM

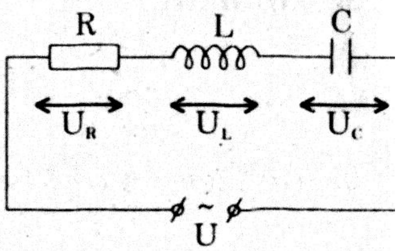
$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{U_L}{Z_L} = \frac{U_C}{Z_C} = \frac{U}{Z} \quad \text{hay} \quad I_0 = \frac{U_{0R}}{R} = \frac{U_{0L}}{Z_L} = \frac{U_{0C}}{Z_C} = \frac{U_0}{Z_C}$$

Ví dụ : Đặt một hiệu điện thế xoay chiều tần số 50Hz vào hai đầ đoạn mạch gồm một điện trở thuần R, một cuộn thuần cảm L, một t điện có điện dung C = 4μF mắc nối tiếp nhau. Hiệu điện thế hiệu dụng đ được giữa hai đầu cuộn cảm là 10V, giữa hai đầu tụ điện là 120V. Tính :

1. Cường độ dòng điện hiệu dụng trong mạch.

2. Giá trị của điện trở R và hệ số tự cảm L. Lấy $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}318$.

Giải



1. *Cường độ dòng điện hiệu dụng :*

Dung kháng : $Z_C = \frac{1}{C.\omega} = \frac{1}{4.10^{-6}.100\pi}$

$= 796\ (\Omega)$

Cường độ : $I = \frac{U_C}{Z_C} = \frac{120}{796} = 0{,}1507538\ (A) \approx 0{,}151\ (A)$

2. ***Giá trị của R và L :***

- $I = \frac{U_L}{Z_L} \Rightarrow Z_L = \frac{U_L}{I} = \frac{10}{0{,}151} = 66{,}225166\ (\Omega)$

  $L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{66{,}225166}{100\pi} \approx 0{,}21\ (H)$

- $I = \frac{U}{Z} \Rightarrow Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{0{,}151} = 1457\ (\Omega)$.

  Với $Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$

  $\Rightarrow R = \sqrt{Z^2 - (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{1457^2 - (66{,}2 - 796)^2} = 1261\ (\Omega)$.

Dạng 2 : BIỂU THỨC CƯỜNG ĐỘ DÒNG ĐIỆN VÀ BIỂU THỨC HIỆU ĐIỆN THẾ

* Nếu dòng điện là $i = I_0\sin\omega t$ thì hiệu điện thế giữa hai đầu đoạn mạch là $u = U_0\sin(\omega t + \varphi)$.

* Ngược lại, nếu biểu thức hiệu điện thế là $u = U_0\sin\omega t$ thì cường đ dòng điện qua chính đoạn mạch ấy là : $i = I_0\sin(\omega t - \varphi)$.

$$\text{Với}\begin{cases} + \ I_0 = \dfrac{U_0}{Z} \\ + \ \text{tg}\varphi = \dfrac{Z_L - Z_C}{R} \end{cases}$$

- Nếu đoạn mạch chỉ có R thì $\varphi = 0$
- Nếu đoạn mạch chỉ có L thì $\varphi = +\dfrac{\pi}{2}$
- Nếu đoạn mạch chỉ có C thì $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$
- Nếu đoạn mạch chỉ có L và C với $\begin{cases} Z_L > Z_C \text{ thì } \varphi = +\dfrac{\pi}{2} \\ Z_L < Z_C \text{ thì } \varphi = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Ví dụ 1 : Đặt một hiệu điện thế $U = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t$ V vào hai đầu đoạn mạch gồm một bóng đèn chỉ có điện trở thuần $R = 300\Omega$ và tụ điện có điện dung $C = 7{,}95\mu F$ mắc nối tiếp với nhau. Viết biểu thức :

a) Cường độ dòng điện trong mạch.

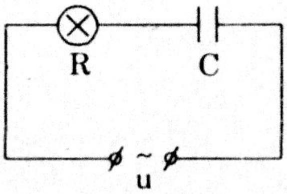
b) Hiệu điện thế giữa hai đầu bóng đèn và giữa hai đầu tụ.

Lấy $\dfrac{1}{\pi} = 0{,}318$ và $\text{tg}53^0 = \dfrac{4}{3}$.

Giải

a) *Biểu thức cường độ dòng điện :*

Vì biểu thức U có dạng : $u = U_0\sin\omega t$ nên biểu thức dòng điện i trong mạch : $i = I_0\sin(\omega t - \varphi)$



Có :
$$Z_C = \frac{1}{C.\omega} = \frac{1}{7,95.10^{-6}.100\pi} = 400\ (\Omega)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500\ (\Omega)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{120\sqrt{2}}{500} = 0,24\sqrt{2}\ \ (A)$$

$$\text{tg}\varphi = -\frac{Z_C}{R} = -\frac{400}{300} = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -53^0 = -\frac{53\pi}{180}\ \text{(rad)}$$

Vậy :
$$i = 0,24\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{53\pi}{180}\right)\ (A).$$

b) ***Biểu thức hiệu điện thế giữa hai đầu đèn và hai đầu tụ :***

– Hiệu điện thế giữa hai đầu đèn (điện trở thuần) cùng pha với cường độ qua đèn ($\varphi = 0$) nên :

$$U_d = U_{0d}\sin\left(100\pi t + \frac{53\pi}{180}\right)$$

với $U_{0d} = I_0.R = 0,24\sqrt{2}.300 = 72\sqrt{2}$ (V).

Vậy : $U_d = 72\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{53\pi}{180}\right)$ (V).

Hiệu điện thế giữa hai đầu tụ điện trễ pha hơn dòng điện qua tụ góc $\frac{\pi}{2}$ nên :

$$U_C = U_{0C}\sin\left(100\pi t + \frac{53\pi}{180} - \frac{\pi}{2}\right) = U_{0C}\sin\left(100\pi t - \frac{37\pi}{180}\right)$$

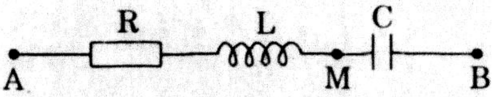
với : $U_{0C} = I_0.Z_C = 0,24\sqrt{2}.400 = 96\sqrt{2}$ (V).

Vậy : $U_C = 96\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{37\pi}{180}\right)$ (V).

Ví dụ 2 : Giữa hai điểm A, B có điện trở thuần $R = 100\Omega$, cuộn dây chỉ có $L = \frac{1}{\pi}$ H và tụ $C = \frac{10^{-4}}{2\pi}$ F mắc nối tiếp như hình vẽ.

Biểu thức hiệu điện thế tức thời giữa A và M là : $U_{AM} = 200\sin 100\pi t$ V.

Viết biểu thức hiệu điện thế U_{AB}.



Giải

- Cường độ tức thời qua đoạn mạch AM : $i = I_0\sin(100\pi t - \varphi_{AM})$

Với : $Z_L = L\omega = \frac{1}{\pi}.100\pi = 100\ (\Omega)$

$$Z_{AM} = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}\ (\Omega)$$

$$I_0 = \frac{U_{0AM}}{Z_{AM}} = \frac{200}{100\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ (A)$$

$$tg\varphi_{AM} = \frac{Z_L}{R} = \frac{100}{100} = 1 \quad \rightarrow \quad \varphi_{AM} = \frac{\pi}{4}$$

Vậy : $i = \sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ (A).

- i cũng là dòng điện qua cả đoạn mạch AB nên :

$$U_{AB} = U_{0AB}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4} + \varphi_{AB}\right)$$

Với : $Z_C = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{\dfrac{10^{-4}}{2\pi}.100\pi} = 200\ (\Omega)$

$$Z_{AB} = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{100^2 + (100 - 200)^2} = 100\sqrt{2}\ (\Omega)$$

$$U_{0AB} = I_0.Z = \sqrt{2}.100\sqrt{2} = 200\ (V)$$

$$tg\varphi_{AB} = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{100 - 200}{100} = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{AB} = -\frac{\pi}{4}$$

Vậy : $U_{AB} = 200\sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right) = 200\sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ (V).

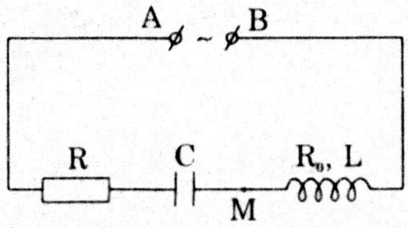
Dạng 3 : ĐỘ LỆCH PHA

- Độ lệch pha φ giữa hiệu điện thế hai đầu đoạn mạch RLC với dòng điện i cho bởi : $tg\varphi = \dfrac{Z_L - Z_C}{R}$
- Độ lệch pha giữa hiệu điện thế 2 đầu đoạn mạch khác nhau trên cùng một mạch điện được xác định.

+ Hoặc bằng cách so sánh độ lệch pha φ_1 và φ_2 của hai hiệu điện thế với dòng điện trong mạch.

+ Hoặc bằng hai vectơ quay $\vec{v_1}$ và $\vec{v_2}$ trên cùng một giản đồ.

Ví dụ 1 : Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ.



Biết : R = 50Ω; $C = \dfrac{2}{\pi}.10^{-4}$ F;

$U_{AM} = 80\sin 100\pi t$ V;

$U_{AB} = 200\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \dfrac{105\pi}{180}\right)$ V.

Tính R_0 và L.

Giải

+ $Z_{AM} = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = 50\sqrt{2}\ (\Omega)$

+ $I = \dfrac{U_{AM}}{Z_{AM}} = \dfrac{U_{MB}}{{}_{MB}} \Rightarrow Z_{MB} = \dfrac{U_{MB}}{U_{AM}}.Z_{AM} = 250\ (\Omega)$

hay : $\sqrt{R_0^2 + Z_L^2} = 250\ (\Omega)$ (1)

+ Độ lệch pha giữa U_{AM} và dòng điện i là φ_{AM} cho bởi :

$$\text{tg}\varphi_{AM} = -\frac{Z_C}{R} = -1; \qquad \varphi_{AM} = -\frac{\pi}{4} < 0$$

Dòng điện i sớm pha hơn U_{AM} góc $\frac{\pi}{4}$ nên pha của dòng điện i là $\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

Suy ra độ lệch pha giữa U_{MB} và dòng điện i là :

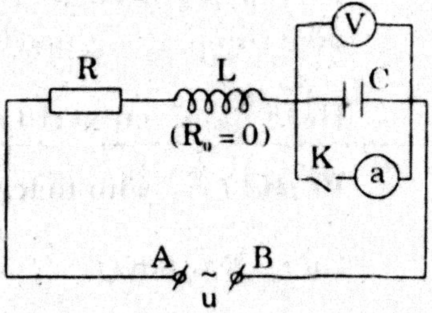
$$\varphi_{MB} = \left(100\pi t + \frac{105\pi}{180}\right) - \left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3}$$

+ Có : $\text{tg}\varphi_{MB} = \frac{Z_L}{R_0}$ hay : $\sqrt{3} = \frac{Z_L}{R_0} \Rightarrow Z_L = R_0\sqrt{3}$ (2)

(1) và (2) cho : $\begin{cases} R_0 = 125\ (\Omega) \\ Z_L = 125\sqrt{3}\ (\Omega) \rightarrow L = \dfrac{125\sqrt{3}}{100\pi}\ (H). \end{cases}$

Ví dụ 2 : Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ trong đó vôn kế Ⓥ có điện trở vô cùng lớn, ampe kế ⓐ có điện trở không đáng kể.

- Khi k đóng thì dòng điện qua ⓐ lệch pha so với U_{AB} góc 37^0.
- Khi k mở thì Ⓥ chỉ 155V và hiệu điện thế tức thời giữa 2 đầu vôn kế Ⓥ trễ pha so với U_{AB} góc $\frac{\pi}{6}$.

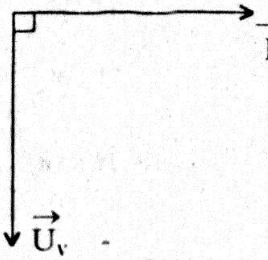


Tính U_{AB} (lấy $\text{tg}37^0 = \frac{3}{4}$ và $\sqrt{3} = 1,73$).

Giải

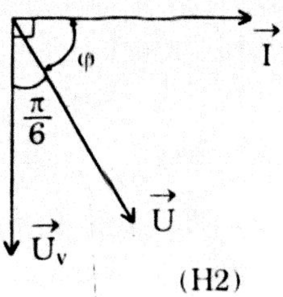
+ k đóng : Mạch điện có R, L, (a) mắc nối tiếp nên :

$$\text{tg}37^0 = \frac{Z_L}{R} \Rightarrow Z_L = \frac{3R}{4}$$



(H1)

+ k mở : Mạch điện có R, L, C mắc nối tiếp. Đầu tiên ta vẽ được các vectơ quay $\vec{I}$ và $\vec{U}_V$ (H.1), từ đó ta suy ra vị trí của $\vec{U}$ (H.2).



(H2)

Suy ra : $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ nên :

$$\text{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{Z_L - Z_C}{R} \Rightarrow Z_L - Z_C = -R\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad Z_C = Z_L + R\sqrt{3} = \frac{3R}{4} + R\sqrt{3} = 2{,}48R$$

$$+ \ \text{Có}: \quad I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (-R\sqrt{3})^2}} = \frac{U}{2R}$$

$$+ \ \text{Có}: \quad U_V = I.Z_C = \frac{U}{2R} \times 2{,}48R \quad \Rightarrow \quad U = \frac{U_V}{1{,}24} = 125\ (V).$$

Dạng 4 : HIỆN TƯỢNG CỘNG HƯỞNG TRONG MẠCH RLC

Nếu 2 đầu đoạn mạch RLC có hiệu điện thế dụng U không đổi thì :

I : Max $\Leftrightarrow$ $Z_L = Z_C$ (cộng hưởng điện)

Lúc đó :
- $Z = R$: Min
- $I_{max} = \dfrac{U}{R}$
- Cường độ i và hiệu điện thế U cùng pha.

Ví dụ 1 : Cho đoạn mạch xoay chiều gồm cuộn dây có điện trở thuần $R = 80\Omega$, độ tự cảm $L = 0{,}191H$ nối tiếp với tụ C thay đổi được.

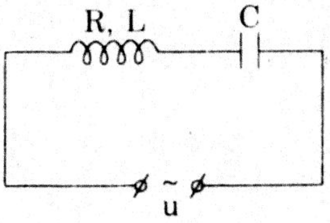
Hiệu điện thế giữa hai đầu đoạn mạch luôn luôn ổn định :

$$U = 141{,}4\sin 100\pi t \ V.$$

Điều chỉnh C để cường độ hiệu dụng trong mạch cực đại.

a) Tính giá trị hiệu dụng của tụ.

b) Viết biểu thức dòng điện i.



Giải

a) *Điện dung C :*

Cảm kháng : $Z_L \quad = 0{,}191.100\pi = 60\ (\Omega)$

I : Max $\leftrightarrow$ $Z_C = Z_L = 60\ (\Omega)$ (cộng hưởng điện)

Điện dung : $C = \dfrac{1}{Z_C.10} = \dfrac{1}{60.100\pi} = 53.10^{-6}\ (F) = 53\ (\mu F).$

b) *Biểu thức dòng điện i :*

- Khi có cộng hưởng điện thì dòng điện i và hiệu điện thế U cùng pha nên : $i = I_0\sin 100\pi t$
- Biên độ dòng điện : $I_0 = \dfrac{U_0}{R} = \dfrac{141{,}4}{80} = 1{,}7675\ (A)$

Vậy : $i = 1{,}7675\sin 100\pi t\ (A).$

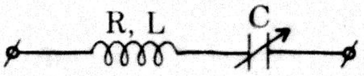
Ví dụ 2 : Cho mạch điện gồm một cuộn dây mắc nối tiếp với một tụ điện. Cuộn dây có điện trở thuần R và hệ số tự cảm L. Tụ điện có điện dung C thay đổi được. Mạch điện được đặt vào hiệu điện thế xoay chiều có hiệu điện thế xoay chiều có hiệu điện thế hiệu dụng V = 200V và tần số góc $\omega = 100\pi$ rad/s.

Cho biết khi $C = C_1 = \frac{25}{\pi}\mu F$ và $C = C_2 = \frac{50}{\pi}\mu F$ thì cường độ hiệu dụng trong mạch như nhau $I_1 = I_2 = \sqrt{2}A$.

Xác định C để cường độ hiệu dụng trong mạch đạt cực đại, tính cường độ cực đại đó.

(ĐHQG TP.HCM - 7/98)

Giải



- Với $C = C_1$:

$$+\quad Z_{C_1} = \frac{1}{C_1\omega} = \frac{1}{\frac{25}{\pi}.10^{-6}.100\pi} = 400\ (\Omega)$$

$$+\quad Z_1 = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{U}{I_1} = \frac{200}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad R^2 + (Z_L - Z_{C_1})^2 = (100\sqrt{2})^2 \qquad (1)$$

- Với $C = C_2$:

$$+\quad Z_{C_2} = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{\frac{50}{\pi}.10^{-6}.100\pi} = 200\ (\Omega)$$

$$+\quad Z_2 = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_{C_2})^2} = \frac{U}{I_2} = \frac{200}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad R^2 + (Z_L - Z_{C_2})^2 = (100\sqrt{2})^2 \qquad (2)$$

(1) và (2) ta được : $Z_L = \frac{Z_{C_1} + Z_{C_2}}{2} = \frac{400 + 200}{2} = 300\ (\Omega)$

Thay $Z_L = 300\Omega$, $Z_{C_1} = 400\Omega$ vào (1) :

$$R^2 + (300 - 400)^2 = (100\sqrt{2})^2 \quad \Rightarrow \quad R = 100\ (\Omega)$$

- I : Max ↔ $Z_C = Z_L = 300\ (\Omega) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{300.100\pi} = \frac{10^{-4}}{3\pi}$ (F)

Và : $I_{max} = \frac{U}{R} = \frac{200}{100} = 2$ (A).

Dạng 5 : CHỨNG TỎ CUỘN DÂY CÓ ĐIỆN TRỞ THUẦN

Dùng phản chứng : Giả sử nếu cuộn dây không có điện trở thuần, ta sẽ chứng minh trái giả thiết.

Ví dụ 1 : Một cuộn dây tự cảm L mắc vào nguồn xoay chiều có hiệu điện thế tức thời $u = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V) thì cường độ dòng điện qua cuộn dây là : $i = \sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{3}\right)$ A.

- Chứng tỏ cuộn dây có điện trở thuần R.
- Tính R và L.

Giải

- Nếu cuộn dây không điện trở thuần thì hiệu điện thế giữa hai đầu cuộn dây sớm pha hơn dòng điện qua nó góc $\dfrac{\pi}{2}$ trái giả thiết. Vậy cuộn dây có điện trở thuần R.
- Theo đề : $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{Z_L}{R} \quad \Rightarrow \quad Z_L = R\mathrm{tg}\varphi = \sqrt{3}R$$

Và $Z_{d} = \dfrac{U_0}{I_0} = \dfrac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 100\ (\Omega)$

$$\sqrt{R^2 + Z_L^2} = 100$$

$$\sqrt{R^2 + (\sqrt{3}R)^2} = 100 \quad \Rightarrow \quad R = 50\ (\Omega)$$

$$Z_L = \sqrt{3}.50$$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{50\sqrt{3}}{100\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0{,}276\ (\mathrm{H}).$$

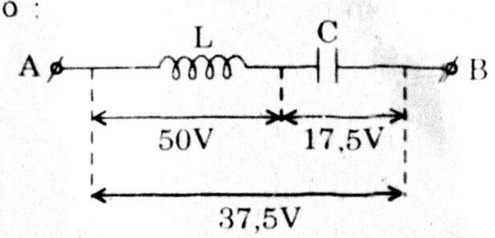
Ví dụ 2 : Một cuộn dây có hệ số tự cảm L được mắc nối tiếp với 1 tụ điện có điện dung C rồi mắc vào 2 điểm A, B của một hiệu điện thế xoay chiều.

Đo hiệu điện thế giữa hai đầu của đoạn mạch AB, giữa hai đầu cuộn dây và giữa hai đầu tụ điện bằng một vôn kế có điện trở vô cùng lớn ta lần lượt được : $U_{AB} = 37{,}5$V; $U_L = 50$V; $U_C = 17{,}5$V.

Hãy giải thích rằng tại sao $U_{AB} \neq U_L + U_C$ và tại sao có thể kết luận rằng cuộn dây có điện trở không thuần đáng kể.

Giải

- Với giá trị tức thời của hiệu điện thế, ta có :

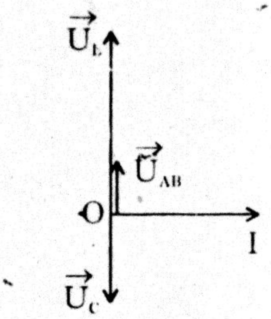


$$u_{AB} = u_L + u_C$$

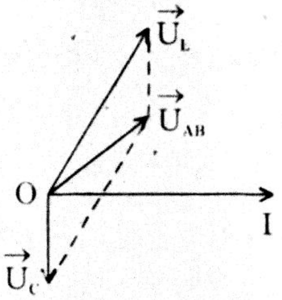
$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$\vec{U}_{AB} = \vec{U}_L + \vec{U}_C$$

Giản đồ vectơ :



hình 1 : R = 0



hình 2 : R ≠ 0

Với $H_1 : U_{AB} = U_L - U_C < U_L + U_C$

$H_2 : U_{AB} < U_L + U_C$

Vậy cả hai trường hợp : $U_{AB} \neq U_L + U_C$

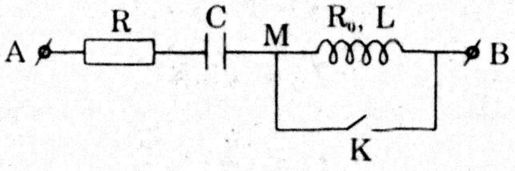
- Nếu cuộn dây không có điện trở thuần (R = 0) thì :

$U_{AB} = U_L - U_C = 50 - 17,5 = 32,5$ (V) : trái giả thiết.

Vậy cuộn dây có điện trở thuần đáng kể.

ĐỀ THI

6.1 Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ.



Hiệu điện thế giữa A và B luôn luôn có biểu thức : $u = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V).

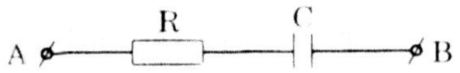
Bỏ qua điện trở dây nối và khóa K.

Khi khóa K đóng, dòng điện qua điện trở R có giá trị hiệu dụng $\sqrt{3}$A và lệch pha $\frac{\pi}{3}$ so với U. Khi K mở, dòng điện qua R có giá trị hiệu dụng bằng 1,5A so với U. Khi K mở, dòng điện qua R có giá trị hiệu dụng bằng 1,5A và nhanh pha $\frac{\pi}{6}$ so với U.

Tìm R, điện dung C của tụ, điện trở thuần R_0 và hệ số tụ cảm L của cuộn dây.

(ĐHQG – TPHCM – 97)

Giải



- K đóng : Mạch điện xem như chỉ có R – C mắc nối tiếp :

Ta có : $\quad \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{Z_C}{R} \quad \Rightarrow \quad Z_C = R\sqrt{3}$ (1)

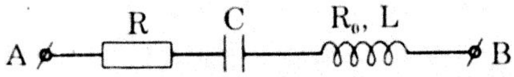
Và : $\quad \sqrt{3} = \dfrac{100}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \dfrac{100}{\sqrt{3}}$ (2)

(1) và (2) cho : $\quad \sqrt{R^2 + (R\sqrt{3})^2} = \dfrac{100}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{50\sqrt{3}}{3} = 28{,}867513 \approx 28{,}87\ (\Omega)$$

(1) $\Rightarrow \quad Z_C = \dfrac{50\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 50\ (\Omega)$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{50.100\pi} = \frac{2.10^{-4}}{\pi}\ (F) = 63{,}69\ (\mu F)$$



- K mở : Mạch điện có R, C và cuộn dây mắc nối tiếp :

Ta có : $\quad \operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{Z_L - Z_C}{R + R_0} \quad \Rightarrow \quad Z_L - Z_C = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(R + R_0)$ (3)

Và : $\quad 1{,}5 = \dfrac{100}{\sqrt{(R + R_0)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$ (3)

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(R + R_0)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \dfrac{100}{1{,}5}$ (4)

(3) và (4) cho : $\sqrt{(R + R_0)^2 + \dfrac{1}{3}(R + R_0)^2} = \dfrac{100}{1{,}5}$

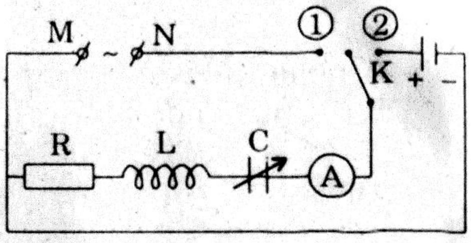
$$\frac{2(R + R_0)}{\sqrt{3}} = \frac{100}{1{,}5}$$

Với $R = \dfrac{50\sqrt{3}}{3}$ (Ω), ta được : $R_0 = \dfrac{50\sqrt{3}}{3}$ (Ω).

(3) $\Rightarrow \quad Z_L = Z_C - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times \dfrac{100\sqrt{3}}{3} = 50 - \dfrac{100}{3} = \dfrac{50}{3}$ (Ω)

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{50}{3.100\pi} = \frac{1}{6\pi}\ (H) \approx 0{,}053\ (H).$$

6.2 Cho mạch điện như hình vẽ với $R = 30\Omega$; $L = \dfrac{0,7}{\pi}$ H, điện trở thuần của cuộn dây coi bằng không; Ⓐ là ampe kế có điện trở không đáng kể. Tụ điện C có thể thay đổi điện dung.



Giữa hai điểm M, N có hiệu điện thế : $U_{MN} = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V), t là thời gian đo bằng giây. Nguồn nhiệt một chiều có suất điện động $E = 24$V, điện trở trong $r = 2\Omega$.

a) Điều chỉnh cho điện dung của tụ điện bằng $\dfrac{10^{-4}}{\pi}$ F. Đóng khóa K vào chốt 1. Xác định số chỉ của ampe kế và viết biểu thức của dòng điện qua R.

b) Điều chỉnh cho điện dung của tụ điện bằng $\dfrac{1}{7\pi}$ mF. Đóng khóa K vào chốt 1. Hãy cho biết có hiện tượng gì xảy ra và số chỉ của ampe kế bằng bao nhiêu ?

c) Giữ nguyên giá trị của điện dung của tụ điện như câu b). Đóng khóa K vào chốt 2. Xác định số chỉ ổn định của ampe kế.

(ĐH BÁCH KHOA HÀ NỘI – 7/97)

Giải

a) *Số chỉ của ampe kế – Biểu thức dòng điện qua R :*

+ $Z_L = L\omega = \dfrac{0,7}{\pi}.100\pi = 70\ (\Omega)$

+ $Z_C = \dfrac{1}{C.\omega} = \dfrac{1}{\dfrac{10^{-4}}{\pi}.100\pi} = 100\ (\Omega)$

+ $Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{30^2 + (70 - 100)^2} = 30\sqrt{2}\ (\Omega)$

+ Độ chỉ ampe kế (A) : $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{120}{30\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = 2,828$ (A)

+ Biểu thức dòng điện : $i = I_0\sin(100\pi t - \varphi)$

Với : $I_0 = I\sqrt{2} = 4$(A)

$$\text{tg}\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = -\frac{30}{30} = -1 \quad \rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

Vậy : $i = 4\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (A).

b) *Hiện tượng xảy ra khi* $C = \frac{1}{7\pi} mF$:

+ $Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{\frac{1}{7\pi}.10^{-3}.100\pi} = 70\ (\Omega)$

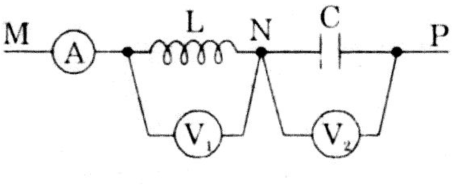
Vậy : $Z_C = Z_L$: có hiện tương cộng hưởng điện xảy ra trong mạch.

+ Lúc đó : $I_{max} = \frac{U}{R} = \frac{120}{30} = 4\ (A)$.

c) *Số chỉ ổn định của ampe kế khi đóng K vào 2 :*

Mạch RLC được mắc vào nguồn 1 chiều. Dòng điện qua ampe kế chỉ tồn tại tức thời lúc đóng mạch và sau đó vì dòng điện không qua tụ C nên dòng điện nhanh chóng trở về số không và đó cũng là số chỉ ổn định của ampe kế.

6.3 Cho mạch điện như hình bên, trong đó Ⓐ là một ampe kế có điện trở rất nhỏ, (V_1), (V_2) là hai vôn kế có điện trở rất lớn, L là cuộn cảm, C là tụ điện.



Đặt vào hai đầu M và P một hiệu điện thế tính bằng vôn có biểu thức $U_{MP} = 141{,}4\sin 100\pi t$ thì thấy rằng ampe kế Ⓐ chỉ 0,5A, vôn kế (V_1) chỉ 75V, vôn kế V_2 chỉ 125V.

1. Chứng minh rằng cuộn cảm L có điện trở R đáng kể và hiệu điện thế U_{MN} lệch pha $\frac{\pi}{2}$ so với hiệu điện thế U_{MP}.

2. Tính điện dung C của tụ, độ tự cảm L và điện trở R của cuộn cảm. Viết biểu thức của cường độ dòng điện và của các hiệu điện thế U_{MN}, U_{MP}.

(ĐH DƯỢC HÀ NỘI – 7/97)

Giải

1. *Chứng minh rằng cuộn cảm có điện trở R đáng kể và độ lệch pha giữa U_{MN} và U_{MP} :*

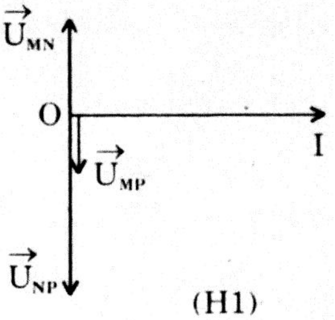
- Nếu R = 0 ta có giản đồ vectơ như (H.1), trong đó $\vec{U}_{MN}$ và $\vec{U}_{NP}$ ngược hướng.

Do đó : $U_{MP} = U_{NP} - U_{MN} = 125 - 75 = 50\ (V)$

trái với giả thiết vì đề cho : $U_{0MP} = 141{,}4\ (V)$.

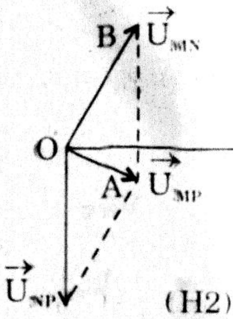
$\rightarrow \quad U_{MP} = \frac{U_{0MP}}{\sqrt{2}} = 100\ (V)$

Vậy cuộn cảm L có điện trở thuần đáng kể.



(H1)

- Vì cuộn cảm L có điện trở thuần nên giản đồ vectơ như (H.2).



(H2)

ΔOAB có : $OA^2 + OB^2 = 100^2 + 75^2 = 15625$

và $AB^2 = 125^2 = 15625$

Vậy : $AB^2 = OA^2 + OB^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ hay : U_{MN} và U_{MP} lệch pha $\frac{\pi}{2}$.

2. *Tính C, L, R – Viết các biểu thức i; U_{MN}; U_{NP} :*

+ $$Z_C = \frac{U_2}{I} = \frac{125}{0,5} = 250\ (\Omega)$$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{250.100\pi} = 12,7.10^{-6}\ (F) = 12,7\ (\mu F)$$

+ $$\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{U_{MP}}{I} = \frac{100}{0,5}$$

$$R^2 + (Z_L - Z_C)^2 = 200^2$$

$$R^2 + Z_L^2 - 2Z_LZ_C + Z_C^2 = 4.10^4 \qquad (1$$

Và $$\sqrt{R^2 + Z_L^2} = \frac{U_{MP}}{I} = \frac{75}{0,5}$$

$$R^2 + Z_L^2 = 150^2 = 22\,500 \qquad (2$$

$$(1) - (2) = -2Z_LZ_C + Z_C^2 = 40\,000 - 22\,500$$

$$-2.Z_L.250 + 250^2 = 17500 \quad \Rightarrow \quad Z_L = 90\ (\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{90}{100\pi} = 0,2866242\ (H) \approx 0,287\ (H).$$

+ (2) ⇒ $$R = \sqrt{22\,500 - 90^2} = 120\ (\Omega)$$

+ Biểu thức dòng điện : $i = I_0\sin(100\pi t - \varphi)$

$$I_0 = I\sqrt{2} = 0,5\sqrt{2}\ (A)$$

$$tg\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{90 - 250}{120} = -\frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad \varphi = -53^0 = -\frac{53\pi}{180}\text{rad}$$

Vậy : $i = 0,5\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{53\pi}{180}\right)$ (A).

+ Vì U_{MN} sớm pha hơn U_{MP} góc $\frac{\pi}{2}$ nên : $U_{MN} = U_{0MN}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

Với $U_{0MN} = U_1R2 = 75\sqrt{2}$ (V)

Vậy : $U_{MN} = 75\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (V)

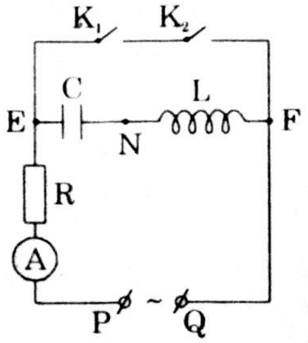
+ Vì U_{NP} trễ pha hơn dòng điện i góc $\frac{\pi}{2}$ nên :

$$U_{NP} = U_{0NP}\sin\left(100\pi t + \frac{53\pi}{180} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Với $U_{0NP} = U_2\sqrt{2} = 125\sqrt{2}$ (V)

Vậy : $U_{NP} = 125\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{37\pi}{180}\right)$ (V).

6.4 Trong mạch điện xoay chiều PQ (hình vẽ) điện trở của ampe kế, các khóa K và của dây nối nhỏ không đáng kể. Mạch gồm cuộn dây NF có độ tự cảm L (bỏ qua điện trở thuần) tụ C và điện trở R. Hiệu điện thế hiệu dụng U_{PQ} không đổi.



a) Vẽ giản đồ vectơ biểu diễn độ lệch pha giữa cường độ dòng điện và hiệu điện thế của mạch PQ khi K_1 đóng, K_2 mở và khi K_1 mở, K_2 đóng.

b) Tìm độ lệch pha giữa cường độ dòng điện và hiệu điện thế khi K_1 đóng, K_2 mở, biết rằng số chỉ của ampe kế lúc đó là 0,6A và số chỉ của ampe kế là 3A khi K_1, K_2 đều đóng.

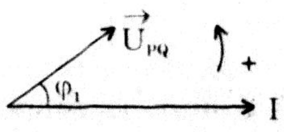
c) Tính số chỉ của ampe kế khi K_1, K_2 đều mở, biết rằng nếu K_1 mở, K_2 đóng thì ampe kế chỉ 1A.

(ĐH HÀNG HẢI - 7/97)

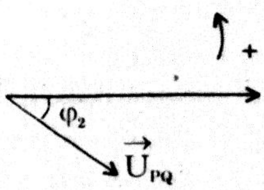
Giải

a) *Giản đồ vectơ :*

+ Khi K_1 đóng, K_2 mở, dòng điện qua R và L (không qua C), do đó mạch điện gồm R – L mắc nối tiếp, vì vậy U_{PQ} sớm pha hơn dòng điện i (H.1).



(H1)



(H2)

+ Khi K_1 mở, K_2 đóng dòng điện qua R và C (không qua L), mạch điện gồm R – C mắc nối tiếp nên U_{PQ} trễ pha hơn dòng điện i (H.2).

b) *Độ lệch pha φ_1 :*

+ K_1 đóng – K_2 mở : $I_1 = \dfrac{U_{PQ}}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}}$ (1)

+ **K_1 – K_2 đều đóng** :

Dòng điện chỉ qua R (**không** qua L và C) : $I_2 = \dfrac{U_{PQ}}{R}$ (2)

+ **Lập tỉ** số : $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}} = \cos\varphi_1$ **hay** $\cos\varphi_1 = \dfrac{0,6}{3} = 0,2$

Vì U_{PQ} sớm pha hơn i nên : $\varphi_1 = \text{arccos } 0,2 > 0$.

c)* *Số chỉ ampe kế khi K_1 – K_2 đều mở :

$$(2) \rightarrow R = \frac{U_{PQ}}{I_2} = \frac{U}{3}$$

$$(1) \rightarrow R^2 + Z_L^2 = \frac{U^2}{I_1^2} = \frac{U^2}{0,36}$$

$$Z_L^2 = \frac{U^2}{0,36} - R^2 = \frac{U^2}{0,36} - \frac{U^2}{9} = \frac{8}{3}U^2 \Rightarrow Z_L = \sqrt{\frac{8}{3}}U$$

+ **K_1 mở, K_2 đóng** : $I_3 = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} \Rightarrow R^2 + Z_C^2 = \dfrac{U^2}{I_3^2} = \dfrac{U^2}{I^2}$

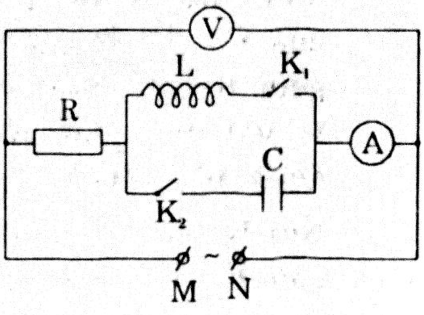
$$\Rightarrow Z_C^2 = U^2 - R^2 = U^2 - \frac{V^2}{9} = \frac{8}{9}U^2 \Rightarrow Z_C = \frac{\sqrt{8}}{3}U$$

+ **K_1 – K_2 đều mở** : mạch điện gồm R – L – C mắc nối tiếp :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{\dfrac{U^2}{9} + \left(\sqrt{\dfrac{8}{3}}U - \dfrac{\sqrt{8}}{3}U\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{9} + \left(\dfrac{8}{3} + \dfrac{8}{9} - \dfrac{2.8}{3\sqrt{3}}\right)}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{33 - 16\sqrt{3}}} \approx 1,3 \text{ (A)}.$$

6.5 **Cho mạch điện** như hình vẽ. Ampe kế **nhiệt, khóa** K_1, K_2 có điện trở không **đáng kể**, vôn kế có điện trở rất lớn. **Điện trở** R = 212Ω, tụ điện có điện **dung** C = 15μF, cuộn dây có hệ số tự **cảm** L, còn điện trở thuần của cuộn **dây không đáng** kể.



Hiệu điện thế giữa hai đầu M, N có biểu thức : u = 240sin100πt (V)

1. **Khóa** K_1 ngắt, K_2 đóng. Viết biểu thức của cường độ **dòng điện** qua R. **Tìm số** chỉ ampe kế và vôn kế.

2. Khi K_1 đóng, K_2 ngắt thì thấy số chỉ của ampe kế không thay đổi. Tính hệ số tự cảm L và viết biểu thức của cường độ dòng điện qua R.

3. Tính công suất tiêu thụ trên mạch điện trong hai trường hợp và giải thích kết quả tìm được.

(ĐH THƯƠNG MẠI – 7/97)

Giải

1. *K_1 ngắt – K_2 đóng. Biểu thức i_R, số chỉ Ⓐ và Ⓥ:*

K_1 ngắt – K_2 đóng, mạch điện có R – C – Ⓐ mắc nối tiếp.

+ $Z_C = \dfrac{1}{C.\omega} = \dfrac{1}{15.10^{-6}.100\pi} = 212\ (\Omega)$

- $Z_1 = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \sqrt{212^2 + 212^2} = 212\sqrt{2}\ (\Omega)$

- Độ chỉ ampe kế : $I_1 = \dfrac{U}{Z_1} = \dfrac{120\sqrt{2}}{212\sqrt{2}} = 0{,}566\ (A)$

+ Vì $u_{MN} = 240\sin 100\pi t\ (V)$ nên biểu thức dòng điện có dạng :

$$i_R = I_0\sin(100\pi t - \varphi_1)$$

$$\text{Với}\ \begin{cases} I_0 = I_1\sqrt{2} = 0{,}566\sqrt{2}\ (A) \\ \text{tg}\varphi_1 = \dfrac{-Z_C}{R} = -1 \rightarrow \varphi_1 = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Vậy : $i = 0{,}566\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)\ (A)$

+ Độ chỉ vôn kế : $U = \dfrac{240}{\sqrt{2}} = 120\sqrt{2} = 169{,}68 \approx 170\ (V)$

2. *K_1 đóng – K_2 ngắt. Tính L và viết biểu thức i_R :*

+ K_1 đóng – K_2 ngắt, mạch có R – L – Ⓐ mắc nối tiếp : $Z_2 = \dfrac{U}{I} = Z_1$

Hay : $\sqrt{R^2 + Z_L^2} = \sqrt{R^2 + Z_C^2} \Rightarrow Z_L = Z_C = 212\ (\Omega)$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{212}{100\pi} = 0{,}67416 \approx 0{,}67\ (H)$$

+ Biểu thức cường độ qua R : $i_R = I_0\sin(100\pi t - \varphi_2)$

Với : $\text{tg}\varphi_2 = \dfrac{Z_L}{R} = 1 \rightarrow \varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$

Vậy : $i_R = 0{,}566\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{4}\right)\ (A)$

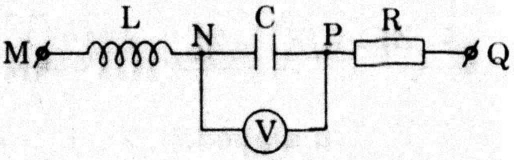
3. *Công suất tiêu thụ :*

Trong cả hai trường hợp chỉ có R tiêu thụ công suất. Hơn nữa, cả hai đều có cùng cường độ I, do đó chúng cùng tiêu thụ một công suất :

$$P = I^2.R = (0{,}566)^2 \times 212 = 67{,}915472 \approx 67{,}9\ (W).$$

6.6 Cho một mạch điện xoay chiều có sơ đồ như hình vẽ. Đặt hiệu điện thế xoay chiều tần số 50Hz vào hai đầu MQ của đoạn mạch thì vôn kế nhiệt chỉ 90V ($R_V = \infty$). Khi đó U_{MN} lệch pha 150^0 và U_{MP} lệch pha 30^0 so với U_{NP}. Đồng thời $U_{MP} = U_{MN} = U_{PQ}$. Cho biết điện trở thuần của đoạn mạch PQ là $R = 30\Omega$.

1. Hỏi cuộn dây có điện trở thuần không ? Giải thích.
2. Tính hiệu điện thế hiệu dụng U tại hai đầu M, Q của đoạn mạch.
3. Tính hệ số tự cảm L của cuộn dây.



(ĐHQG HÀ NỘI – 7/98)

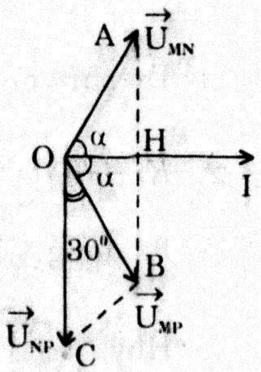
Giải

1. *Giải thích xem cuộn dây có điện tích thuần không ?*

Nếu cuộn dây không có điện trở thuần thì hiệu điện thế tức thời giữa 2 đầu cuộn dây (U_{MN}) và hiệu điện thế giữa hai đầu tụ (U_{NP}) ngược pha tức lệch pha 180^0.

Nhưng theo đề, chúng chỉ lệch pha 150^0. Vậy cuộn dây phải có điện trở thuần.

2. *Hiệu điện thế U_{MQ} :*



Có : $U_{MP} = U_{MN} + U_{NP}$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$\vec{U}_{MP} = \vec{U}_{MN} + \vec{U}_{NP}$$

Ta vẽ được các vectơ Frexnen như sau :

+ Do U_{MN} lệch pha với U_{NP} góc 150^0 nên suy ra U_{MN} lệch pha với dòng điện i góc $\alpha = 60^0$.

+ Do U_{MP} lệch pha với U_{NP} góc 30^0 nên U_{MP} lệch pha với i cũng 1 góc $\alpha = 60^0$.

+ Do tứ giác OABC là hình bình hành nên suy ra :

$$AB = OC = U_{NP} = 90\ (V)$$

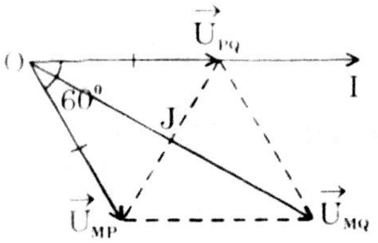
+ Tam giác OAH $\rightarrow$ $\sin\alpha = \dfrac{AH}{OA}$ $\rightarrow$ $OA = \dfrac{AH}{\sin\alpha} = \dfrac{45}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 30\sqrt{3}$

hay : $U_{MP} = U_{MN} = 30\sqrt{3}\ (V)$

+ Có : $U_{MQ} = U_{MP} + U_{PQ}$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$\vec{U}_{MQ} = \vec{U}_{MP} + \vec{U}_{PQ}$$



Ta có giản đồ : (hình bên)

Các vectơ tạo thành hình thoi.

Ta có : $OJ = \dfrac{U_{MP}.\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \quad U_{MQ} = 2.OJ = U_{MP}\sqrt{3} = (30\sqrt{3}).\sqrt{3} = 90\ (V).$

3. *Giá trị của L :*

U_{MN} sớm pha hơn dòng điện i góc $\alpha = 60^0$, nên :

$$tg60^0 = \frac{Z_L}{R_0} \quad \rightarrow \quad Z_L = R_0 tg60^0 = \sqrt{3}R_0$$

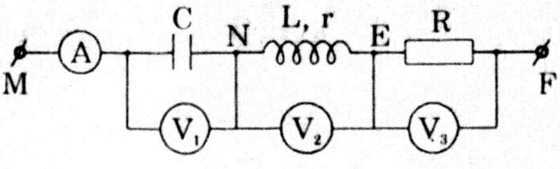
Mà : $U_{MN} = U_{MP} = U_{PQ}$ hay : $I.Z_{MN} = I.R \quad \Rightarrow \quad Z_{MN} = R$

$$\sqrt{R^2 + Z_L^2} = 30$$

$$\sqrt{R_0^2 + (\sqrt{3}R_0)^2} = 30 \quad \Rightarrow \quad R_0 = 15\ (\Omega)$$

$$\rightarrow \quad Z_L = 15\sqrt{3}\ (\Omega) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{15\sqrt{3}}{100\pi} = 0{,}0827\ (H).$$

6.7 Cho mạch điện như hình vẽ, hiệu điện thế giữa hai đầu M, F có biểu thức $U_{MF} = 80\sqrt{2}\sin 100\pi t$ V. Cuộn dây có điện trở thuần r và độ tự cảm L, tụ điện có điện dụng C, điện trở $R = 100\Omega$. Dây nối và ampe kế nhiệt có điện trở không đáng kể, điện trở các vôn kế nhiệt rất lớn. Vôn kế (V_2) chỉ $30\sqrt{2}$ V, vôn kế (V_3) chỉ 50V. Hiệu điện thế giữa hai đầu cuộn dây sớm pha hơn so với dòng điện trong mạch một góc $\dfrac{\pi}{4}$.



1. Tìm số chỉ của vôn kế (V_1) và của ampe kế (A).

2. Tính r, L, C và công suất tiêu thụ trên mạch điện.

3. Thay tụ điện bằng một cuộn dây có điện trở thuần R_0 và độ tự cảm L_0 sao cho $U_{MF} = U_{MN} + U_{NF}$ và khi đó vôn kế (V_1) chỉ 20V.

Tính R_0 và L_0.

(ĐH THỦY LỢI – 97)

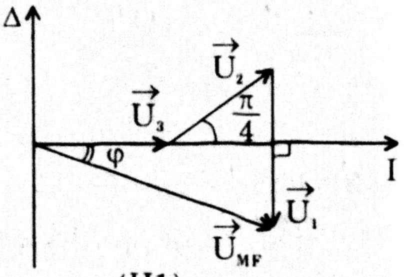
Giải

***1.** Số chỉ của (V_1) và (A):*

- Số chỉ của (A) : $I = \dfrac{U_3}{R} = \dfrac{50}{100} = 0{,}5\ (A)$

- Có : $$\begin{array}{ccccccc} U_{MF} & = & U_1 & + & U_2 & + & U_3 \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{U}_{MF} & = & \vec{U}_1 & + & \vec{U}_2 & + & \vec{U}_3 \end{array}$$

Vẽ được giản độ vectơ như (H.1). Chiếu các vectơ xuống hai trục Δ và I ta được :



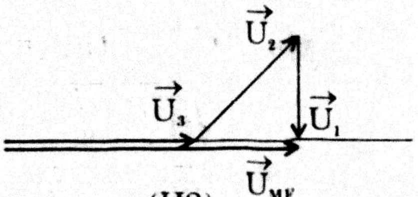
(H1)

$$+ \qquad U_{MF}\sin\varphi = U_2\sin\frac{\pi}{4} - U_1$$

$$80\sin\varphi = 30\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} - U_1 \qquad (1)$$

$$+ \qquad U_{MF}\cos\varphi = U_3 + U_2\cos\frac{\pi}{4}$$

$$80\cos\varphi = 50 + 30\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}$$



(H2)

$\Rightarrow \quad \cos\varphi = 1 \quad \rightarrow \quad \varphi = 0$ ($\vec{U}_{MF}$ nằm trên $\vec{I}$ như H2)

Thay $\varphi = 0$ vào (1) ta được : $0 = 30 - U_1 \quad \Rightarrow \quad U_1 = 30\ (V)$.

***2.** Giá trị r, L, C :*

- $Z_C = \dfrac{U_1}{I} = \dfrac{30}{0{,}5} = 60\ (\Omega)$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{60.100\pi} = 0{,}053.\ 10^{-3}\ (F) = 53\ (\mu F).$$

- Đối với cuộn dây :

$$tg\varphi_2 = \frac{Z_L}{r} \quad (\text{với } \varphi_2 = \frac{\pi}{4}) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{Z_L}{tg\varphi_2} = \frac{Z_L}{tg\,\frac{\pi}{4}} = Z_L$$

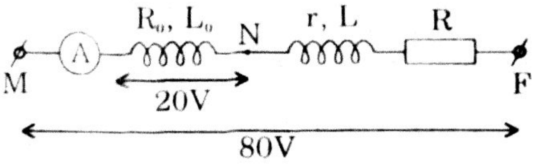
Và : $Z_{dây} = \sqrt{r^2 + Z_L^2} = r\sqrt{2}$

Với $Z_{dây} = \dfrac{U_2}{I} = \dfrac{30\sqrt{2}}{0{,}5} = 60\sqrt{2}\ (\Omega)$

Vậy : $r\sqrt{2} = 60\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad r = 60\ (\Omega)$

và : $L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{60}{100\pi} = 0{,}19\ (H)$.

3. *Tính giá trị R_0 và L_0 :*



Có : $U_{MF} = U_{MN} + U_{NF}$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$\vec{U}_{MF} = \vec{U}_{MN} + \vec{U}_{NF}$$

Theo đề : $U_{MF} = U_{MN} + U_{NF}$ nên $\vec{U}_{MN}$ và $\vec{U}_{NF}$ cùng giá tức U_{MN} và U_{NF} cùng pha, vậy : $\varphi_{MN} = \varphi_{NF}$

$$\text{tg}\varphi_{MN} = \text{tg}\varphi_{NF}$$

$$\frac{Z_{L_0}}{R_0} = \frac{Z_L}{R + r} = \frac{60}{100 + 60} = \frac{3}{8} \Rightarrow R_0 = \frac{8}{3} Z_{L_0}$$

Có : $I = \frac{U_{MN}}{Z_{MN}} = \frac{U_{NF}}{Z_{NF}}$

$$\frac{20}{\sqrt{R_0^2 + Z_L^2}} = \frac{60}{\sqrt{(R + r)^2 + Z_L^2}} = \frac{60}{\sqrt{160^2 + 60^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{R_0^2 + Z_L^2} = \frac{1}{3}\sqrt{29200}$$

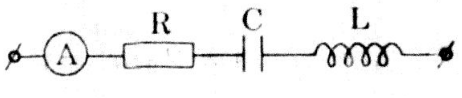
$$\sqrt{\left(\frac{8}{3} Z_{L_0}\right)^2 + Z_{L_0}^2} = \frac{1}{3}\sqrt{29200}$$

$$\frac{\sqrt{73}}{3} Z_{L_0} = \frac{1}{3}\sqrt{29200} \Rightarrow Z_{L_0} = \sqrt{\frac{29200}{73}} = \mathbf{20\ (\Omega)}$$

$$L_0 = \frac{20}{100\pi} = 0{,}06\ (H) \quad \text{và} \quad R_0 = \frac{8}{3} \times 20 \approx 53{,}3\ (\Omega).$$

6.8 Cho một mạch điện xoay chiều gồm điện trở R, tụ điện có **điện dung** và cuộn dây có hệ số tự cảm L mắc nối tiếp **như hình vẽ.** Ⓐ **là amp** kế nhiệt có điện trở không đáng kể. Hiệu điện **thế hiệu dụng giữa ha** đầu đoạn mạch là 200V, khi tần số góc **của dòng điện là ω_1 = 400 rad/** thì ampe kế chỉ $\sqrt{2}$ A và cường độ dòng điện **i trễ pha so với hiệu điệ** thế u giữa hai đầu đoạn mạch là $\frac{\pi}{4}$.

Khi tần số góc của dòng điện là $\omega_2 = 200\sqrt{2}$ rad/s thì cường độ dòng điện i đồng pha với hiệu điện thế u.



a) Hãy xác định giá trị của R, L, C.

b) Khi tần số góc của dòng điện là ω_1 thì giá trị tức thời của hiệu điện thế giữa hai đầu đoạn mạch là : $u = 20\sqrt{2}\sin 400t$ (V)

Viết biểu thức của hiệu điện thế tức thời trên điện trở R trên tụ điện C và trên cuộn cảm L trong trường hợp này.

(ĐH THƯƠNG MẠI – 7/98)

Giải

***a)** Giá trị của R, L, C :*

+ Với tần số ω_1 :

- $Z_1 = \dfrac{U}{I_1} = \dfrac{200}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}\ (\Omega)$

- $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{R}{Z_1} \quad \Rightarrow \quad R = Z_1.\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 100\sqrt{2}.\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 100\ (\Omega)$

- $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{L\omega_1 - \dfrac{1}{C\omega_1}}{R} \quad \Rightarrow \quad L\omega_1 - \dfrac{1}{C\omega_1} = R$

$$400L - \frac{1}{400C} = 100 \qquad (1)$$

+ Với tần số ω_2 : $\quad L\omega_2 = \dfrac{1}{C\omega_2} \quad$ [cộng hưởng điện]

$$L = \frac{1}{C\omega_2^2} = \frac{1}{(200\sqrt{2})^2 C} \qquad (2)$$

(1) và (2) cho : $\quad 400.\dfrac{1}{(200\sqrt{2})^2 C} - \dfrac{1}{400C} = 100$

$$\frac{1}{200C} - \frac{1}{400C} = 100 \quad \Rightarrow \quad C = 0,25.10^{-4}\ (F)$$

(2) → $\quad L = \dfrac{1}{(200\sqrt{2})^2 \times 0,25.10^{-4}} = 0,5$ (H).

***b)** Các biểu thức U_R; U_L và U_C :*

Với tần số $\omega_1 = 400$rad/s thì : $I = \sqrt{2}$ (A) và i trễ pha so với u góc $\dfrac{\pi}{4}$

nên : $\quad i = 2\sin\left(400t - \dfrac{\pi}{4}\right)$ (A)

- $U_{0R} = I_0.R = 2.100 = \mathbf{200\ (V)}$ **và** U_R cùng pha với i nên :

$$u_R = 200\sin\left(400t - \frac{\pi}{4}\right)\ (V)$$

- $U_{0L} = I_0L.\omega_1 = 2.0,5.400 = \mathbf{400\ (V)}$

Hiệu thế giữa hai **đầu cuộn thuần** cảm sớm pha hơn dòng điện i góc $\frac{\pi}{2}$

nên pha của U_L là : $400t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 400t + \frac{\pi}{4}$

Vậy : $u_L = 400\sin\left(400t + \frac{\pi}{4}\right)\ (V)$

- $U_0C = I_0.\frac{1}{C\omega_1} = 2\frac{1}{0,25.10^{-4}.400} = 200\ (\Omega)$

Hiệu thế giữa **hai đầu tụ trễ pha** hơn dòng điện i góc $\frac{\pi}{2}$ nên pha của

u_C là : $400t - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 400t - \frac{3\pi}{4}$

Vậy : $u_C = 200\sin\left(100t - \frac{3\pi}{4}\right)\ (V).$

6.9 Một bóng đèn **điện có ghi (25W** – 50V) được mắc nối tiếp với một ống dây có hệ số **tự cảm L và điện trở** thuần r = 20Ω vào mạch điện xoay chiều 120V – **50Hz thì thấy đèn** sáng bình thường.

1. Tính hệ số tự cảm L **của ống dây**.
2. Tính công suất tiêu **hao của dòng** điện trên ống dây và độ lệch pha của cường độ **dòng điện so với hiệu điện** thế hai đầu ống dây.
3. Nếu đưa lõi sắt vào **trong lòng** ống dây thì đều có sáng bình thường không ? Tại sao ?

(ĐH HÀNG HẢI – 1996)

Giải

1. *Hệ số tự cảm L của ống dây :*

Vì đèn sáng **bình thường nên cường** độ dòng điện :

$$I = \frac{P_d}{U_d} = \frac{25}{50} = 0,5\ (A)$$

Tổng trở mạch điện $Z = \frac{U}{I} = \frac{120}{0,5} = 240\ (\Omega)$

Với $Z = \sqrt{(R + r)^2 + Z_L^2} \Rightarrow Z_L = \sqrt{Z^2 - (R + r)^2}$

Trong đó R là điện trở đèn : $R = \dfrac{U_d}{I} = \dfrac{50}{0,5} = 100\ (\Omega)$

nên : $Z_L = \sqrt{240^2 - (100 + 20)^2} = 207,84609 \approx 207,8\ (\Omega)$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{207,8}{314} \approx 0,66\ (H).$$

2. *Công suất tiêu hao trên ống dây và **độ lệch pha** :*

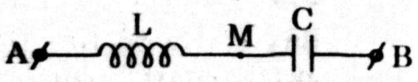
- $P_d = I^2.r = 0,5^2 \times 20 = 5\ (W)$
- $tg\varphi_d = \dfrac{Z_L}{r} = \dfrac{207,8}{20} = 10,39 \Rightarrow \varphi_{dây} = arctg10,39.$

3. *Đưa lõi sắt vào vòng ống dây :*

Đưa lõi sắt vào lòng ống dây thì **hệ số tự cảm ống dây tăng lên,** tổng trở của mạch điện tăng lên, cường độ **I giảm : đèn ít sáng hơn.**

6.10 Một cuộn dây mắc nối tiếp với **một tụ điện rồi nối với hiệu điện thế** xoay chiều $u = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V). **Dùng một vôn kế nhiệt có** $R_V = \infty$ để đo hiệu điện thế U_{AM} thì thấy **vôn kế chỉ 120V và** U_{AM} **sớm pha** so với U_{AB} góc $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Biết $\omega^2 \neq \dfrac{1}{LC}$, **chứng tỏ rằng cuộn dây** có điện trở thuần R đáng kể.



2. Viết biểu thức hiệu điện thế U_{AM} **và** U_{MB}.

3. Cho R = 50Ω, tính độ tự cảm L của **cuộn dây và điện dung C của tụ điện.**

(CAO ĐẲNG SƯ PHẠM HÀ NỘI – 1997)

Giải

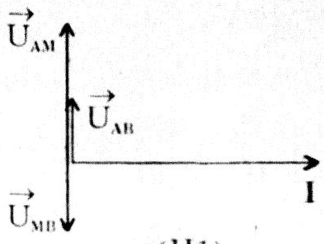
1. *Cuộn dây có điện trở thuần đáng kể :*

Đối với giá trị tức thời, ta có :

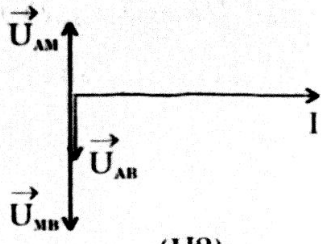
$$U_{AM} + U_{MB} = U_{AB}$$

$$\updownarrow$$

$$\vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MB} = \vec{U}_{AB}$$



(H1)



(H2)

Nếu cuộn dây không có điện trở thuần (R = 0), ta có một trong hai giản đồ như (H1) và (H2) :

Vậy : U_{AM} cùng pha với U_{AB} (H1)

hoặc U_{AM} sớm pha hơn U_{AB} (H2)

Cả hai kết quả trên đều trái với giả thiết.

Vậy : cuộn dây có điện trở thuần R đáng kể.

2. *Biểu thức U_{AM} và U_{MB} :*

- Vì U_{AM} sớm pha hơn U_{AB} góc $\frac{\pi}{2}$ nên :

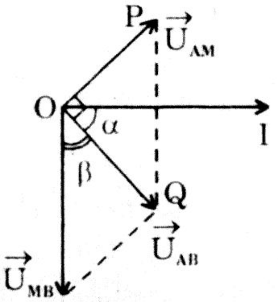
$$\text{pha } U_{AM} = \text{pha } U_{AB} + \frac{\pi}{2} = 100\pi t + \frac{\pi}{2}$$

và $U_{0AM} = U_{AM}\sqrt{2} = 120\sqrt{2}$ (V)

Vậy : $U_{AM} = 120\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (V)

- Dựa trên giả thiết : U_{AM} sớm pha hơn U_{AB} góc $\frac{\pi}{2}$

và $U_{AM} = U_{AB} = 120\text{V}$ nên có giản đồ (H3)



ΔOPQ vuông cân nên :

$U_{MB} = PQ = U_{AM}\sqrt{2} = 120\sqrt{2}$ (V)

và $\alpha = 45^0 \rightarrow \beta = 45^0$

Nên : pha U_{MB} = pha $U_{AB} - 45^0 = 100\pi t - \frac{\pi}{4}$

Vậy : $U_{MB} = (120\sqrt{2})\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right) = 240\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ (V).

3. *Độ tự cảm L và điện dung C :*

- U_{AM} sớm pha hơn i góc $\frac{\pi}{4}$ nên : $\text{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{Z_L}{R} \Rightarrow$ $Z_L = R\text{tg}\frac{\pi}{4} = 50\ (\Omega)$

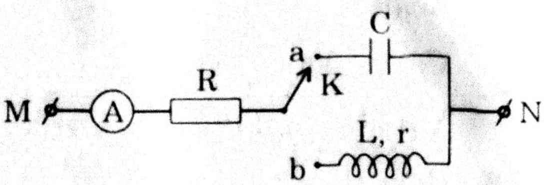
$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{50}{100\pi} = \frac{1}{2\pi}\ \text{(H)}$$

- U_{AB} trễ pha hơn i góc $\frac{\pi}{4}$ nên : $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{Z_L - Z_C}{R}$

$$-1 = \frac{50 - Z_C}{50} \Rightarrow Z_C = 100\ (\Omega)$$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{100.100\pi} = \frac{10^{-4}}{\pi}\ \text{(F)}.$$

6.11 Cho đoạn mạch điện như hình bên. Ampe kế nhiệt Ⓐ có điện trở không đáng kể. Điện trở thuần $R = 60\Omega$. Tụ điện $C = 20\mu F$ cuộn dây có điện trở $r = 10\Omega$ và độ tự cảm L.



Hiệu điện thế $U_{MN} = 170\sin 120\pi t$ (V)

Biết rằng số chỉ ampe kế không đổi khi khóa k chuyển từ vị trí a sang b. Hãy tính độ tự cảm L và số chỉ của ampe kế. Hãy viết các biểu thức cường độ dòng điện qua ampe kế và hiệu điện thế U_{KN} trong mỗi trường hợp.

(ĐH CÔNG ĐOÀN – 1997)

Giải

- *k ở vị trí a .*

+ $Z_C = \dfrac{1}{C.\omega} = \dfrac{1}{20.10^{-6}.120\pi} = 132{,}5\ (\Omega)$

+ $Z_1 = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \sqrt{60^2 + 132{,}5^2} \approx 145{,}5\ (\Omega)$

+ Số chỉ ampe kế Ⓐ: $I = \dfrac{U}{Z_1} = \dfrac{120}{145{,}5} = 0{,}8247422 = 0{,}825\ (A)$

+ Độ lệch pha của U_{MN} và dòng điện i_1 :

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \frac{-Z_C}{R} = -\frac{132{,}5}{60} \approx -2{,}21$$

$\varphi_1 = -\mathrm{arctg}2{,}21 < 0$: i_1 sớm pha hơn U_{MN} góc $|\varphi_1| = \mathrm{arctg}2{,}21$.

Vậy : $i_1 = 0{,}825\sqrt{2}\sin(120\pi t + \mathrm{arctg}2{,}21)$ (A)

+ $U_{0KN} = I_{01}.Z_C = 0{,}825\sqrt{2}.132{,}5 = 109{,}3\sqrt{2}$ (V)

và U_{KN} trễ pha hơn i góc $\dfrac{\pi}{2}$ nên :

$$U_{KN} = 109{,}3\sqrt{2}\sin\left(120\pi t + \mathrm{arctg}2{,}21 + \frac{\pi}{2}\right)\ (V)$$

- *k ở vị trí b :* R và cuộn dây ghép nối tiếp

+ $Z_2 = \sqrt{(R + r)^2 + Z_L^2} \Rightarrow Z_L = \sqrt{Z_2^2 - (R + r)^2}$ với $Z_2 = \dfrac{U}{I} = 145{,}5\ (\Omega)$

$$= \sqrt{145{,}5^2 - (60 + 10)^2} = 127{,}5\ (\Omega)$$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{127,5}{120\pi} = 0,338\ (H)$$

+ Độ lệch pha giữa U_{MN} và dòng i_2 là φ_2 mà :

$$tg\varphi_2 = \frac{Z_L}{R + r} = \frac{127,5}{60 + 10} = 1,82$$

$\varphi_2 = arctg1,82 > 0$: i trễ pha hơn u góc φ_2

Vậy : $i_2 = 0,825\sqrt{2}\sin(120\pi t - arctg1,82)\ (A)$

+ $U_{0KN} = I_0\sqrt{r^2 + Z_L^2} = 0,825\sqrt{2}\sqrt{10^2 + 127,5^2} = 105,5\sqrt{2}\ (V)$

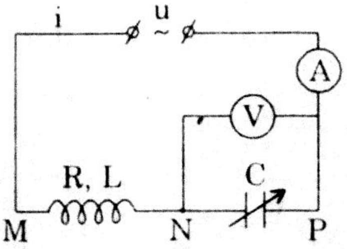
U_{KN} sớm pha hơn i_2 góc φ_3 mà :

$$tg\varphi_3 = \frac{Z_L}{r} = \frac{127,5}{10} = 12,75$$

$\varphi_3 = arctg12,75$

Vậy : $U_{KN} = 105,5\sqrt{2}\sin(120\pi t - arctg1,82 + arctg12,75)\ (V)$.

6.12 Cho mạch điện như hình vẽ :



+ Hiệu điện thế xoay chiều đặt vào hai đầu đoạn mạch là $u = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t\ (V)$.

+ Cuộn dây có hệ số tự cảm L và điện trở $R = 120\Omega$.

Tụ C có điện dung biến thiên. Điện trở của ampe kế Ⓐ và các dây nối không đáng kể. Điện trở của vôn kế rất lớn.

1. Ampe kế chỉ 0,6A; vôn kế chỉ 132V.

a) Tính giá trị của L và C. Biết i sớm pha hơn u.

b) Viết hiệu điện thế tức thời giữa hai đầu cuộn dây.

2. Thay đổi điện dung C của tụ điện để vôn kế chỉ 120V. Tính C và số chỉ ampe kế. Lấy $\pi = 3,14$.

(ĐH TÀI CHÍNH KẾ TOÁN – 1998)

Giải

1.a) *Giá trị L và C :*

- $Z_C = \frac{U_C}{I} = \frac{132}{0,6} = 220\ (\Omega)$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{220.100\pi} = 14,4759.10^{-6}\ F \approx 14,5\ (\mu F)$$

- $$Z_{MP} = \frac{U}{I} = \frac{120}{0,6} = 200\ (\Omega)$$

Với $Z_{MP} = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} \Rightarrow (Z_L - Z_C)^2 = Z_{MP}^2 - R^2$

Vì i sớm pha hơn u nên : $\text{tg}\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} < 0 \Rightarrow Z_L - Z_C < 0$

Vậy : $Z_L - Z_C = -\sqrt{Z_{MP}^2 - R^2}$

$$Z_L = Z_C - \sqrt{Z_{MP}^2 - R^2} = 220 - \sqrt{200^2 - 120^2} = 220 - 160 = 60\ (\Omega)$$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{60}{100\pi} = 0,1910828 \approx 0,19\ (H).$$

b) *Hiệu điện thế tức thời giữa hai đầu cuộn dây :*

- $$\text{tg}\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{60 - 220}{120} = -\frac{4}{3}$$

$$\varphi = -\text{arctg}\frac{4}{3} \approx -53^0 = -0,925 \text{ rad}$$

Vậy pha của dòng điện i : $100\pi t + 0,925$

- Độ lệch pha giữa hiệu thế hai đầu cuộn dây với dòng điện i là $\varphi_{dây}$:

$$\text{tg}\varphi_{dây} = \frac{Z_L}{R} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

$\varphi_{dây} = \text{arctg}\frac{1}{2} \approx 26^0\,36' = 0,464 \text{ rad} > 0$: hiệu thế giữa hai đầu cuộn dây sớm pha hơn dòng điện i góc $\varphi_{dây}$ nên :

$$\text{pha } U_{dây} = \text{pha } i + \varphi_{dây} = 100\pi t + 0,925 + 0,464 = 100\pi t + 1,389$$

- $U_{0dây} = I_0.Z_{dây} = I\sqrt{2}.\sqrt{R^2 + Z_L^2} = 0,6\sqrt{2}.\sqrt{120^2 + 60^2} = 113,8\ (V)$

Vậy : $U_{dây} = 113,8\sin(100\pi t + 1,389)\ (V).$

2. *Giá trị C và số chỉ ampe kế :*

- Gọi C' và I' là các giá trị mới :

$$\left.\begin{aligned} U'_C &= I'.Z'_C \\ U &= I'.Z' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{Z'_C}{Z'} = \frac{U'_C}{U} = \frac{120}{120} = 1$$

$$\Rightarrow Z'_C = Z' = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z'_C)^2}$$

$$Z'^2_C = R^2 + Z_L^2 + Z'^2_C - 2Z_L.Z'_C$$

$$\Rightarrow Z'_C = \frac{R^2 + Z_L^2}{2Z_L} = \frac{120^2 + 60^2}{2.60} = 150\ (\Omega)$$

$$C' = \frac{1}{150.100\pi} = 0{,}0212314.10^{-3}\ F \approx 21{,}2\ (\mu F)$$

- Số chỉ ampe kế :

$$I' = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z'_C)^2}} = \frac{120}{\sqrt{120^2 + (60 - 150)^2}} = \frac{120}{150} = 0{,}8\ (A).$$

6.13 1. Một động cơ điện xoay chiều M và một cuộn tự cảm L mắc nối tiếp với nhau được mắc vào mạng điện xoay chiều. Động cơ điện có hiệu suất 85% và sản sinh được một công suất cơ học 80KW.

a) Tính điện năng động cơ điện tiêu thụ trong 15 phút.

b) Dòng điện qua động cơ có cường độ 220A và chậm pha 30^0 so với hiệu điện thế ở hai cực của động cơ. Tính hiệu điện thế này.

c) Hiệu điện thế hiệu dụng ở hai đầu cuộn L là 270W và sớm pha 60^0 so với dòng điện. Tính hiệu điện thế của mạng điện và góc sớm pha của nó so với dòng điện.

2. Sợi nung của một ấm điện có hai cuộn. Khi một cuộn được nối điện, nước trong ấm điện bắt đầu sôi sau 15 phút và khi cuộn kia được nối điện sau 30 phút bắt đầu sôi.

Nước trong ấm điện sẽ bắt đầu sôi bao lâu, nếu :

a) Hai cuộn sợi nung mắc nối tiếp ?

b) Hai cuộn sợi nung mắc song song ?

(ĐH DƯỢC - 1998)

Giải

1. a) Điện năng tiêu thụ của động cơ điện :

- Hiệu suất động cơ $H = \dfrac{\text{Công suất cơ học } P'}{\text{Công suất điện } P}$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{P'}{H} = \frac{80}{0{,}85} \approx 94\ (KW)$$

- Điện năng tiêu thụ của động cơ trong 15 phút $= \dfrac{1}{4}$h :

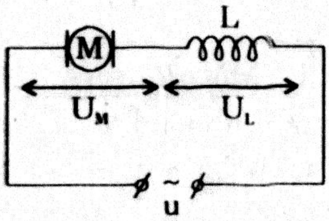
$$W = P.t = 94 \times \frac{1}{4} = 23{,}5\ (KWh).$$

b) Hiệu điện thế ở hai cực động cơ :

Công suất (điện) của động cơ : $P = U_M.I_M.\cos\varphi_M$

$$U_M = \frac{P}{I_M \cdot \cos\varphi_M} = \frac{94.10^3}{220.\cos 30^0} = \frac{94.10^3}{220 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 493,4(V).$$

c) Giá trị U của mạch điện và góc ***lệch pha φ*** *:*



Do : $u = u_M + u_L$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$\vec{u} = \vec{u}_M + \vec{u}_L$$

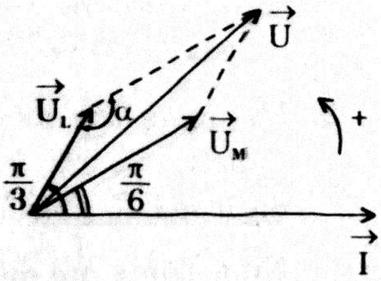
- Ta vẽ được giản đồ vectơ.

Dựa trên giản đồ vectơ ta có : $\alpha = 150^0$

và $U^2 = U_L^2 + U_M^2 - 2U_L.U_M.\cos\varphi$

$= 270^2 + 493,4^2 - 2.270.493,4.\cos 150^0$

$U \approx 740\ (V)$



- Gọi $\varphi = (\vec{I}, \vec{U})$, đó là độ lệch pha giữa u và i.

Chiếu các vectơ xuống trục I :

$$U.\cos\varphi = U_L \cos\frac{\pi}{3} + U_M \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\cos\varphi = \frac{U_L \cos\frac{\pi}{3} + U_M \cos\frac{\pi}{6}}{U} = \frac{270 \cdot \frac{1}{2} + 493,4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{740} \approx 0,76$$

$\varphi \approx 40^0\ 30'$.

2. ***Thời gian nước sôi :***

Gọi Q là nhiệt lượng do tác dụng Jun-lenxơ tỏa ra trên điện trở của ấm điện. Khi nước sôi, nhiệt lượng Q trong các trường hợp đều bằng nhau.

Gọi R là điện trở tổng cộng của 2 sợi nung;

R_1, R_2 là điện trở của mỗi sợi nung.

$$\text{Ta có :}\quad \left.\begin{aligned} Q &= \frac{U^2}{R}t \\ Q &= \frac{U^2}{R_1}t_1 \\ Q &= \frac{U^2}{R_2}t_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} R &= \frac{U^2}{Q}t \\ R_1 &= \frac{U^2}{Q}t_1 \\ R_2 &= \frac{U^2}{Q}t_2 \end{aligned}\right. \quad \text{và} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{Q}{U^2 t} \\ \frac{1}{R_1} &= \frac{Q}{U^2 t_1} \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{Q}{U^2 t_2} \end{aligned}\right.$$

a) R_1 và R_2 mắc nối tiếp :

$$R = R_1 + R_2$$

$$\frac{U^2}{Q}t = \frac{U^2}{Q}t_1 + \frac{U^2}{Q}t_2$$

$$t = t_1 + t_2 = 45 \text{ (phút)}.$$

b) R_1 và R_2 mắc song song :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{Q}{U^2t} = \frac{Q}{U^2t_1} + \frac{Q}{U^2t_2}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$$

$$t = \frac{t_1t_2}{t_1 + t_2} = \frac{15.30}{15 + 30} = 10 \text{ (phút)}.$$

6.14 Người ta mắc một động cơ cảm ứng (coi là cuộn dây) vào mạch điện xoay chiều, thấy hiệu điện thế ở hai đầu động cơ là :

$$u = 120\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (V)}$$

và dòng điện qua nó là : $i = 8\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$ (A).

a) Chứng minh rằng động cơ (cuộn dây) có điện trở.

b) Xác định điện trở R và hệ số tự cảm L của động cơ.

c) Tính công suất tiêu thụ của động cơ.

d) Mắc động cơ nối tiếp với một tụ điện có điện dung C rồi mắc vào mạch điện xoay chiều trên, thấy công suất tiêu thụ của động cơ vẫn không đổi. Xác định C.

(ĐH THỦY LỢI – 98)

Giải

a) Động cơ có điện trở :

Độ lệch pha giữa u và i :

$$\varphi = \text{pha u} - \text{pha i} = \left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) - \left(100\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}$$

Vậy động cơ có điện trở thuần (vì nếu không có R thì u sớm pha hơn i một góc $\frac{\pi}{2}$).

b) Giá trị R và L :

- $\text{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{Z_L}{R} \quad \Rightarrow \quad Z_L = R$
- $Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{120\sqrt{2}}{8} = 15\sqrt{2}\,(\Omega)$

hay $\sqrt{R^2 + Z_L^2} = 15\sqrt{2}$

$$\sqrt{R^2 + R^2} = 15\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad R = 15\,(\Omega)$$

và $L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{15}{100\pi} \approx 0,048\,(H).$

c) Công suất động cơ :

$$P = UI.\cos\varphi = 120.\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 480\,(W).$$

d) Giá trị của C :

Công suất tiêu thụ của động cơ cho bởi : $P = I^2.R$

Vì P không đổi nên I không đổi khi có tụ C, vậy :

$$\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{R^2 + Z_L^2}$$

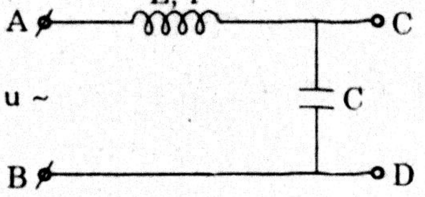
$$R^2 + Z_L^2 + Z_C^2 - 2Z_LZ_C = R^2 + Z_L^2$$

$$Z_C^2 - 2Z_LZ_C = 0$$

Với $Z_C \neq 0$ thì $Z_C = 2Z_L = 2.15 = 30\,(\Omega)$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{30.100\pi} = 0,106.10^{-3}\,F.$$

6.15 Đặt vào hai đầu A, B của mạch điện hình bên một hiệu điện thế xoay chiều u có tần số f = 1000Hz. Khi nối vào hai điểm C, D một ampe kế chỉ 0,1A.



Dòng điện qua ampe kế trễ pha so với hiệu điện thế u một lượng $\frac{\pi}{4}$.

Nếu thay ampe kế bằng một vôn kế thì vôn kế chỉ 20V.

Hiệu điện thế giữa hai đầu vôn kế trễ pha so với u một lượng $\frac{\pi}{4}$. Vôn kế có điện trở vô cùng lớn, ampe kế có điện trở không đáng kể.

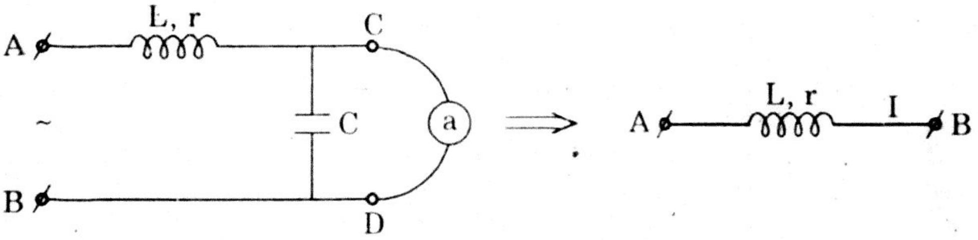
1. Tính L, C và điện trở r của cuộn cảm.

2. Tần số của dòng điện phải bằng bao nhiêu để độ lệch pha giữa u và hiệu điện thế hai đầu vôn kế bằng $\frac{\pi}{2}$.

(ĐH MỎ – ĐỊA CHẤT – 96)

Giải

1. *Giá trị L, C và r :*



Vì ampe kế có $R_a = 0$ nên dòng điện không qua tụ C. Mạch điện chỉ có cuộn dây (L, r).

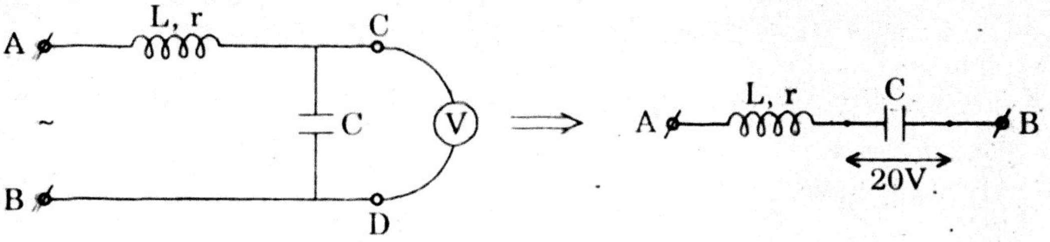
Ta có : $\quad tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{Z_L}{r} \quad \Rightarrow \quad Z_L = r \qquad (1)$

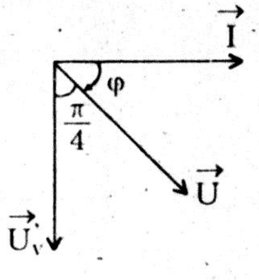
và : $\quad I = \frac{U}{\sqrt{Z_L^2 + r^2}}$

$0,1 = \frac{U}{r\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad U = 0,1\sqrt{2}.r \qquad (2)$

- C và D nối với vôn kế :

Vì $R_V = \infty$ nên dòng điện qua C. Mạch điện có R – L – C nối tiếp.





Theo đề, u_V trễ pha hơn u_{AB} góc $\frac{\pi}{4}$, ta có giản đồ :

Từ giản đồ, ta suy ra : $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

và : $$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{Z_L - Z_C}{r}$$

$$-1 = \frac{r - Z_C}{r} \quad \Rightarrow \quad Z_C = 2r \qquad (3)$$

Mặt khác, có : $$U_C = I.Z_C = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \times Z_C$$

Thay $U_C = 20V$; $U = 0,1\sqrt{2}.r$; $Z_L = r$ và $Z_C = 2r$, ta được :

$$20 = \frac{0,1\sqrt{2}.r}{\sqrt{r^2 + (r - 2r)^2}} \times 2r \quad \Rightarrow \quad r = 100\ (\Omega)$$

+ $Z_L = r = 100\ (\Omega)$; $\omega = 2\pi f = 2000\pi$ (rad/s)

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{100}{2000\pi} = \frac{1}{20\pi} = 0,0159\ (H)$$

+ $Z_C = 2r = 200\ (\Omega)$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{200.2000\pi} = \frac{10^{-5}}{4\pi} = 0,796\,(\mu F).$$

2. *Tần số dòng điện để u và u_C lệch pha $\frac{\pi}{2}$:*

u_C và u lệch pha $\frac{\pi}{2}$ thì $\vec{U}$ cùng pha với $\vec{I}$, $\varphi' = 0$.

Lúc đó : $$\mathrm{tg}\varphi' = \frac{Z'_L - Z'_C}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z'_L = Z'_C$$

$$L.2\pi f' = \frac{1}{C.2\pi f'}$$

$$f' = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{20\pi}\cdot\frac{10^{-5}}{4\pi}}} = 10^3\sqrt{2} = 1414\,(Hz).$$

Dạng 6 : CÔNG SUẤT ĐOẠN MẠCH XOAY CHIỀU NỐI TIẾP

1. ***Công thức :*** $\mathbf{P = UI\cos\varphi = I^2R}$ với $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$

- Nên sử dụng : $P = I^2.R$

2. ***Công suất cực đại (P_{max}) khi U không đổi***

$$P = I^2.R = \frac{U^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} \cdot R$$

- R không đổi; L (hoặc C hoặc f) thay đổi :

$$P : \text{Max} \leftrightarrow Z_L = Z_C$$

$$\mathbf{P_{max}} = \frac{\mathbf{U^2}}{\mathbf{R}}$$

- L, C và f không đổi; R thay đổi : $P = \dfrac{U^2}{R + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R}}$

$$P : \text{Max} \leftrightarrow R = |Z_L - Z_C|$$

$$\mathbf{P_{max}} = \frac{\mathbf{U^2}}{\mathbf{2R}}$$

3. *Khảo sát sự thay đổi của P*

- Lấy đạo hàm của P theo đại lượng thay đổi.
- Lập bảng biến thiên.
- Vẽ đồ thị.

Ví dụ 1 : Một mạch điện xoay chiều gồm cuộn dây có $R_0 = 50\Omega$; $L = \dfrac{1}{\pi}$ H; tụ điện $C = \dfrac{10^{-4}}{\pi}$ F và điện trở thuần R thay đổi được, tất cả mắc nối tiếp vào nguồn xoay chiều có hiệu điện thế hiệu dụng U = 100V; tần số góc $\omega = 100\pi$ rad/s.

a) Với $R = 30\Omega$, tính công suất tiêu thụ trên mạch và trên điện trở R.

b) Với R bằng bao nhiêu thì :

– Công suất tiêu thụ trên mạch đạt cực đại.

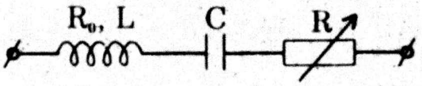
– Công suất tiêu thụ trên R đạt cực đại.

Tìm các giá trị cực đại ấy.

Giải

a) *$R = 30(\Omega)$:*

- $Z_L = L\omega = \dfrac{4}{10\pi} \cdot 100\pi = 40\,(\Omega)$



- $Z_C = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{\dfrac{10^{-4}}{\pi} \cdot 100\pi} = 100\,(\Omega)$

- $Z = \sqrt{(R + R_0)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{(30 + 50)^2 + (40 - 100)^2} = 100\,(\Omega)$

- $I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{100} = 1\,(A)$

- Công suất tiêu thụ trên mạch :

$$P_1 = I^2(R + R_0) = 1^2\,(30 + 50) = 80\ (W)$$

- Công suất tiêu thụ trên R :

$$P_2 = I^2.R = 1^2.30 = 30\ (W).$$

b) Tìm R để P : Max :

- Công suất tiêu thụ trên mạch :

$$P_1 = I^2(R + R_0) = \frac{U^2}{(R + R_0)^2 + (Z_L - Z_C)^2}\cdot(R + R_0)$$

$$= \frac{U^2}{(R + R_0) + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R + R_0}}$$

- Để P : Max thì mẫu số phải cực tiểu,

mà $(R + R_0)\cdot\dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R + R_0} = (Z_L - Z_C)^2$: const

nên mẫu số cực tiểu khi :

$$(R + R_0) = \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R + R_0} \quad \Rightarrow \quad R + R_0 = |Z_L - Z_C|$$

$$R = |Z_L - Z_C| - R_0 = |40 - 100| - 50 = 10\ (\Omega)$$

lúc đó : $P_{max} = \dfrac{U^2}{R + R_0} = \dfrac{100^2}{60} = 166{,}7\ (W)$

- Công suất tiêu thụ trên R :

$$P_2 = I^2.R = \frac{U^2}{(R + R_0)^2 + (Z_L - Z_C)^2}\times R$$

Lấy đạo hàm của P_2 theo R :

$$P_2' = U^2\cdot\frac{1.\left[(R + R_0)^2 + (Z_L - Z_C)^2\right] - R.2(R + R_0)}{\left[(R + R_0)^2 + (Z_L - Z_C)^2\right]^2}$$

P_2 : Max $\leftrightarrow$ $P_2' = 0$

$$(R + R_0)^2 + (Z_L - Z_C)^2 - 2R(R + R_0) = 0$$

$$-R^2 + R_0^2 + (Z_L - Z_C)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad R = \sqrt{R_0^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{50^2 + 60^2} = 78,1(\Omega).$$

Lúc đó : $P_{2(max)} = \dfrac{100^2}{(78,1 + 50)^2 + 60^2} \times 78,1 = 39(W)$

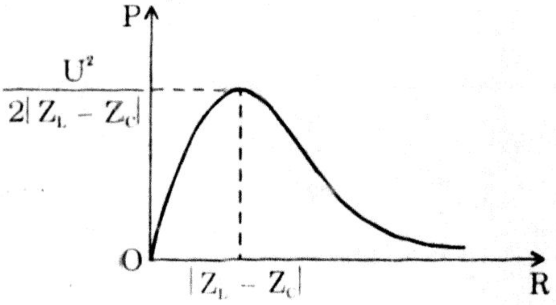
Ví dụ 2 : Đoạn mạch xoay chiều RLC có hiệu điện thế hiệu dụng U và tần số f. Hãy khảo sát sự thay đổi công suất trên đoạn mạch khi R có giá trị thay đổi từ 0 → ∞ (còn L, C, U, f giữ không đổi).

Giải

- Công suất điện của mạch : $P = I^2R = U^2.\dfrac{R}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$
- Đạo hàm P theo R : $P' = U^2.\dfrac{(Z_L - Z_C)^2 - R^2}{\left[R^2 + (Z_L - Z_C)^2\right]^2}$
- $P' = 0 \Rightarrow R = |Z_L - Z_C|$ lúc đó : $P = P_{max} = \dfrac{U^2}{2|Z_L - Z_C|}$
- Bảng biến thiên của P theo R :

R	▨	0		$\lvert Z_L - Z_C\rvert$		∞
P'	▨		+	0	–	
P	▨			$\dfrac{U^2}{2\lvert Z_L - Z_C\rvert}$		
	▨	0	↗		↘	0

- Đồ thị :



Vậy : + Khi R tăng từ 0 → $|Z_L - Z_C|$ thì P tăng từ 0 → $\dfrac{U^2}{2|Z_L - Z_C|}$

+ Khi R tăng từ $|Z_L - Z_C|$ → ∞ thì P giảm từ $\dfrac{U^2}{2|Z_L - Z_C|}$ → 0.

ĐỀ THI

6.16 Cho một đoạn mạch điện gồm một biến trở R, một cuộn dây chỉ có độ tự cảm L và một tụ điện có điện dung $C = \frac{2}{\pi} \cdot 10^{-4}$ F mắc nối tiếp. Hiệu điện thế đặt vào hai đầu đoạn mạch có biểu thức

$$u = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t \text{ (V)}.$$

a) Khi biến trở để ở vị trí R_1 thì dòng điện trong mạch có biểu thức

$$i_1 = 3\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (A)}.$$

Tính R_1, độ tự cảm L và công suất tiêu thụ của đoạn mạch.

b) Điều chỉnh biến trở đến vị trí R_2 thì công suất tiêu thụ của đoạn mạch đạt cực đại. Tính R_2 và công suất cực đại đó.

(CĐ SƯ PHẠM TP.HCM – 97)

Giải

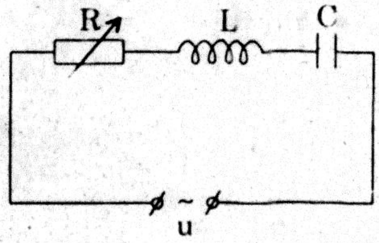
a) *Giá trị R_1, L và công suất :*

- Độ lệch pha giữa u và i là :

$$\varphi = \text{pha u} - \text{pha i} = 100\pi t - \left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

- Có : $$\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{Z_L - Z_C}{R} \quad \Rightarrow \quad Z_L - Z_C = -\frac{R}{\sqrt{3}} \qquad (1)$$

- Và : $$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{120\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 40\,(\Omega)$$



với : $$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

$$40 = \sqrt{R^2 + \left(-\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad R = 20\sqrt{3} = 34,64\,(\Omega)$$

- $$Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{\frac{2}{\pi}\cdot 10^{-4}\cdot 100\pi} = 50\,(\Omega)$$

$$(1) \Rightarrow \quad Z_L = Z_C - \frac{R}{\sqrt{3}} = 50 - \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 30\,(\Omega)$$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{30}{100\pi} = \frac{30}{10\pi}\,(H) = 0{,}0955\,(H)$$

- $P = I^2.R = 3^2.34{,}64 = 311{,}76\ (W)$.

b) *Giá trị R_2 để P : Max :*

- $P = I^2.R = \dfrac{U^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} \times R$ với $Z_L - Z_C = -20\ (\Omega)$

$$= \frac{U^2}{R + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R}}$$

$$P : \text{Max} \leftrightarrow R + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R} : \text{Min}$$

Vì $\begin{cases} \bullet\ R \text{ và } \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R} \text{ không âm} \\ \bullet\ R \times \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R} \text{ không đổi} \end{cases}$

nên $R + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R}$: Min $\leftrightarrow R = \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R}$

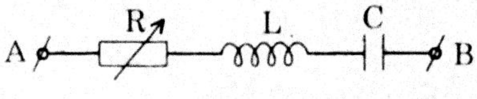
$\leftrightarrow R = |Z_L - Z_C| = 20\ (\Omega)$

hay : $R_2 = 20\ (\Omega)$

- Lúc đó : $P_{max} = \dfrac{U^2}{2R} = \dfrac{120^2}{2.20} = 360\,(W)$.

6.17 Cho mạch điện xoay chiều như hình bên : $u_{AB} = 200\sin(100\pi t)\ (V)$

$C = \dfrac{10^{-4}}{2\pi}(F)$; $L = \dfrac{0{,}8}{\pi}(H)$.



R biến đổi được từ 0 đến 200 (Ω).

1. Tìm công thức tính R để công suất tiêu thụ P của mạch đạt cực đại. Tính công suất cực đại đó (P_{max}).

2. Tính R để công suất tiêu thụ $P = \dfrac{3}{5}P_{max}$. Viết biểu thức cường độ dòng điện khi đó.

(ĐH GIAO THÔNG VẬN TẢI - 98)

Giải

1. *Công suất cực đại :*

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \frac{200}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}\ (V)$$

$$Z_C = \frac{1}{C.\omega} = \frac{1}{\frac{10^{-4}}{2\pi}\cdot 100\pi} = 200\,(\Omega)$$

$$Z_L = L.\omega = \frac{0,8}{\pi}.100\pi = 80\ (\Omega)$$

$$P = I^2.R = \frac{U^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} \times R = \frac{U^2}{P + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}}$$

$$P : \text{Max} \leftrightarrow R + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R} : \text{Min}$$

mà $$R + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R} \geq 2\sqrt{R\cdot\frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}} = 2|Z_L - Z_C|$$

$$\left[R + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}\right]_{min} = 2|Z_L - Z_C|$$

Vậy : $$P_{max} = \frac{U^2}{2|Z_L - Z_C|} = \frac{\left(100\sqrt{2}\right)^2}{2|80 - 200|} = 83,33\ (W)$$

Lúc đó : $$R = \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R} = |Z_L - Z_C| = 120\ (\Omega).$$

2. ***Giá trị R để P = $\frac{3}{5}P_{max}$ và biểu thức i :***

- Có : $$P = I^2.R = \frac{U^2R}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{\left(100\sqrt{2}\right)^2}{R^2 + 120^2}$$

Và $$P_{max} = \frac{\left(100\sqrt{2}\right)^2}{240}$$

Có : $$P = \frac{3}{5}P_{max}$$

$$\frac{\left(100\sqrt{2}\right)^2 R}{R^2 + 120^2} = \frac{3}{5}\,\frac{\left(100\sqrt{2}\right)^2}{240}$$

$$\Rightarrow \quad R^2 - 400R + 14400 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} R = 360\,(\Omega) > 200\,(\Omega) : \text{loại} \\ R = 40\,(\Omega) \end{cases}$$

Vậy chỉ nhận $R = 40\ (\Omega)$

- $$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{40^2 + 120^2} \approx 126,5\,(\Omega)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{200}{126,5} = 1,58\,(A)$$

$$tg\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{-120}{40} = -3$$

$\varphi = -arctg3 < 0$: i sớm pha hơn u góc $|\varphi|$

Vậy : $i = 1,58\sin(100\pi t + arctg3)\ (A)$.

6.18 Một dòng điện xoay chiều tần số $f = 50Hz$ và có cường độ hiệu dụng $I = 1A$ đi qua một cuộn dây có điện trở thuần $R_0 = 32\Omega$; hệ số tự cảm $L = \frac{1}{\pi}H$.

1. Tính hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu cuộn dây.

2. Sử dụng một hiệu điện thế $u = 200\sqrt{2}\sin 100\pi t$ để cung cấp điện cho một mạch gồm cuộn dây nói trên nối tiếp với tụ điện $C = \frac{4}{3\pi}\cdot 10^{-4}F$ và điện trở R thay đổi được.

Hãy xác định giá trị của R để :

a) Công suất của điện trở R cực đại.

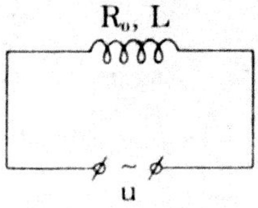
b) Hiệu điện thế giữa hai đầu điện trở R có giá trị $U_R = 100V$.

(ĐH ĐÀ NẴNG – 98)

Giải

1. *Hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu cuộn dây :*

$$Z_L = L.\omega = \frac{1}{\pi}\cdot 100\pi = 100\,(\Omega)$$



$$Z_d = \sqrt{R_0^2 + Z_L^2} = \sqrt{32^2 + 100^2} \approx 105\,(\Omega)$$

$$U_d = I.Z_d = 1.105 = 105\ (V).$$

2.a) *Công suất trên R đạt cực đại :*

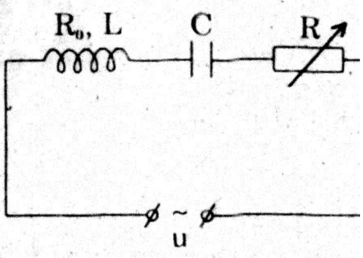
$$P = I^2.R = \frac{U^2}{(R+R_0)^2+(Z_L-Z_C)^2}\times R = \frac{U^2}{\dfrac{(R+R_0)^2+(Z_L-Z_C)^2}{R}}$$

$$= \frac{U^2}{2R_0+\left[R+\dfrac{(Z_L-Z_C)^2+R_0^2}{R}\right]} = \frac{U^2}{2R_0+X}$$

$$P : \text{Max} \leftrightarrow X = R+\frac{(Z_L-Z_C)^2+R_0^2}{R}$$

$$\leftrightarrow R = \frac{(Z_L-Z_C)^2+R_0^2}{R}$$ (vì tích của chúng không đổi)

$$\leftrightarrow R = \sqrt{(Z_L-Z_C)^2+R_0^2}$$



với : $Z_C = \dfrac{1}{C.\omega} = \dfrac{1}{\dfrac{4}{3\pi}\cdot 10^{-4}.100\pi} = 75\,(\Omega)$

Vậy : $R = \sqrt{(100-75)^2+32^2} = 40,6\,(\Omega)$.

b) *$U_R = 100(V)$:*

$$U_R = I.R = \frac{U}{\sqrt{(R+R_0)^2+(Z_L-Z_C)^2}}\times R$$

$$100 = \frac{200R}{\sqrt{(R+32)^2+25^2}}$$

$$\leftrightarrow \quad (R+32)^2+25^2 = 4R^2$$

$$3R^2-64R-1649 = 0$$

$$\Delta' = (32)^2+3.1649 = 5971 \approx 77,3^2$$

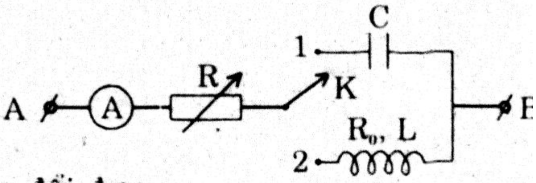
$$R = \frac{32\pm 77,3}{3}$$

Chỉ nhận giá trị dương : $R = 36,4\,(\Omega)$.

6.19 Cho mạch điện như hình vẽ :

$u_{AB} = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V)

$R_0 = 0$, điện trở của ampe kế không đáng kể. Điện trở R có thể thay đổi được.



1. Khi điện trở $R = 60\Omega$ và cho khóa K chuyển từ vị trí 1 sang vị trí 2 thì thấy ampe kế không thay đổi số chỉ và hai dòng lệch pha nhau $\frac{\pi}{2}$.

a) Xác định độ tự cảm L và điện dung C.

b) Cho điện dung C tăng lên $\sqrt{3}$ lần. Khi khóa K ở vị trí 1 và 2 thì hai dòng lệch pha nhau bao nhiêu ? Viết biểu thức của hai dòng điện đó.

2. Để khóa K ở vị trí 2. Cho tần số dòng điện tăng lên gấp 2 lần nhưng giữ nguyên giá trị hiệu điện thế hiệu dụng $U_{AB} = 120V$. Sau đó thay đổi R để công suất tiêu thụ trong mạch đạt cực đại. Xác định giá trị điện trở và công suất cực đại lúc đó.

(ĐH KIẾN TRÚC HÀ NỘI - 98)

Giải

1.a) *Giá trị L và C :*

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{U}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} \\ I_2 &= \frac{U}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}} \end{aligned}\right\} \text{ vì } I_1 = I_2 \text{ nên :}$$

$$\sqrt{R^2 + Z_C^2} = \sqrt{R^2 + Z_L^2} \quad \Rightarrow \quad Z_C = Z_L$$

$$\text{và :} \quad \left.\begin{aligned} tg\varphi_1 &= \frac{-Z_C}{R} \\ tg\varphi_2 &= \frac{Z_L}{R} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad |\varphi_1| = \varphi_2$$

Theo đề : $|\varphi_1| + \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad |\varphi_1| = \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$

Biết φ_2 và R ta suy ra Z_L :

$$Z_L = Rtg\varphi_2 = 60.tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 60\Omega$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{60}{100\pi} = \frac{6}{10\pi} \approx 0,19(H)$$

$$\text{và} \quad C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{60.100\pi} = \frac{10^{-3}}{6\pi}(F) \approx 53\ (\mu F).$$

b) *Độ lệch pha của hai dòng điện và biểu thức cường độ hai dòng điện :*

- Điện dung C tăng lên $\sqrt{3}$ lần thì dung kháng của nó giảm đi $\sqrt{3}$ lần tức $$Z_C = \frac{60}{\sqrt{3}}(\Omega) = 20\sqrt{3}\,(\Omega)$$

Độ lệch pha giữa u và i là φ_1 mà :

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = -\frac{Z_C}{R} = -\frac{20\sqrt{3}}{60} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{6} : \quad i_1 \text{ sớm pha hơn u góc } \frac{\pi}{6}$$

Còn dùng i_2 (K ở vị trí 2) vẫn trễ hơn u góc $\frac{\pi}{4}$.

Vậy 2 dòng i_1 và i_2 lệch pha nhau : $\Delta\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$ (rad)

- $$i_1 = I_{01}\sin(100\pi t - \varphi_1)$$

với : $$I_{01} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} = \frac{120\sqrt{2}}{\sqrt{60^2 + \left(20\sqrt{3}\right)^2}} = \sqrt{6}\,(A)$$

Vậy : $$i_1 = \sqrt{6}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\ (A)$$

- $$i_2 = I_{02}\sin(100\pi t - \varphi_2)$$

với : $$I_{02} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}} = \frac{120\sqrt{2}}{\sqrt{60^2 + 60^2}} = 2\,(A)$$

Vậy : $$i_2 = 2\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)\ (A).$$

2. *Giá trị R để P : Max :*

$$P = I^2.R = \frac{U^2}{R^2 + Z_L'^2}.R = \frac{U^2}{R + \frac{Z_L'^2}{R}}$$

với : $$Z_L' = 2\pi f'.L = 2\pi.100\cdot\frac{6}{10\pi} = 120\,(\Omega)$$

Vì U^2 không đổi nên P : Max khi $R + \frac{Z_L'^2}{R}$: Min

Và vì $R \times \frac{Z_L'^2}{R} = Z_L'^2$ không đổi nên tổng số 2 số hạng ấy cực tiểu khi

$$R = \frac{Z_L'^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad R = Z'_L = 120\,(\Omega)$$

$$(*) \Rightarrow \quad P_{max} = \frac{U^2}{2R} = \frac{120^2}{2.120} = 60\,(W).$$

Dạng 7 : TẦN SỐ f CỦA DÒNG ĐIỆN THAY ĐỔI

- Tìm tần số f để I : Max

$$L.2\pi f = \frac{1}{C.2\pi f} \quad \text{(cộng hưởng điện)}$$

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- Tìm tần số f để hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu tụ C đạt cực đại (U_C : Max)

$$U_C = I.Z_C = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L.2\pi f - \frac{1}{C.2\pi f}\right)^2}} \times \frac{1}{C.2\pi f}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{\left[R^2 + \left(L.2\pi f - \frac{1}{C.2\pi f}\right)^2\right](C.2\pi f)^2}}.$$

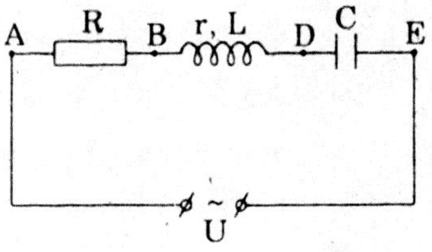
Đưa số hạng trong căn thế ở mẫu số về dạng :

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\text{với } x = f^2)$$

$$U_C : \text{Max} \quad \leftrightarrow \quad y : \text{Min} \quad \leftrightarrow \quad x = f^2 = -\frac{b}{2a}.$$

ĐỀ THI

6.20 Xét một đoạn mạch điện AE gồm một điện trở thuần R = 25Ω, một cuộn dây có điện trở r = 6Ω và độ tự cảm L = 0,01H và một tụ điện có điện dung C = 5,1μF mắc nối tiếp như hình vẽ.



Người ta đặt vào AE một hiệu điện thế xoay chiều u có tần số f = 500Hz và có giá trị hiệu dụng U = 6V.

1. Tính cường độ hiệu dụng I của dòng điện đi qua đoạn mạch và hệ số công suất của cả đoạn mạch.

2. Tính các hiệu điện thế hiệu dụng giữa từng cặp điểm AB, BD, DE.

3. Tính độ lệch pha giữa hiệu điện thế u_{AB} và hiệu điện thế u_{BD}.

4. Giả thiết rằng tần số f có thể thay đổi được, còn giá trị hiệu dụng thì giữ nguyên.

a) Với giá trị nào của f thì cường độ hiệu dụng I có giá trị cực đại Giá trị cực đại ấy là bao nhiêu ?

b) Với giá trị nào của f thì biên độ của hiệu điện thế u_{DE} giữa hai bả của tụ điện có giá trị cực đại ? Tính giá trị cực đại ấy.

(ĐHQG HÀ NỘI – 9

Giải

1. *Cường độ hiệu dụng I và hệ số công suất :*

+ $Z_L = L.\omega = 0{,}01 \times 1000\pi = 10\pi = 31{,}4\ (\Omega)$

+ $Z_C = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{5{,}1.10^{-6}.1000\pi} = 62{,}4\ (\Omega)$

+ $Z = \sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{(25+6)^2 + (31{,}4 - 62{,}4)^2} = 31\sqrt{2}\ (\Omega)$

+ $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{6}{31\sqrt{2}} = 0{,}137\ (A)$

+ Hệ số công suất đoạn mạch : $\cos\varphi = \dfrac{R+r}{Z} = \dfrac{31}{31\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$.

2. *Các hiệu điện thế hiệu dụng :*

+ $U_{AB} = I.R = 0{,}137.25 = 3{,}425\ (V)$

+ $U_{BD} = \sqrt{r^2 + Z_L^2} \times I = \sqrt{6^2 + 31{,}4^2} \times 0{,}137 = 4{,}4\ (V)$

+ $U_{DE} = Z_C.I = 62{,}4 \times 0{,}137 = 8{,}55\ (V)$.

3. *Độ lệch pha giữa u_{AB} và u_{BD} :*

u_{AB} cùng pha với dòng điện i.

Dòng điện i trễ pha hơn u_{BD} góc α mà :

$$\text{tg}\alpha = \frac{Z_L}{r} = \frac{31{,}4}{6} = 5{,}2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{arctg } 5{,}2$$

Vậy u_{AB} trễ pha hơn u_{BD} góc $\alpha = \text{arctg } 5{,}2$.

4. *Giá trị của f :*

a) I : Max $\Leftrightarrow$ $Z_L = Z_C$ (cộng hưởng điện)

$$L.2\pi f = \frac{1}{C.2\pi f} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,01.5,1.10^{-6}}} = 705\,(Hz)$$

Lúc đó : $I_{max} = \frac{U}{R+r} = \frac{6}{25+6}$.

b) $$U_{DE} = I.Z_C = \frac{U}{\sqrt{R'^2 + \left(L.2\pi f - \frac{1}{C.2\pi f}\right)^2}} \cdot \frac{1}{C.2\pi f}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{\left[R'^2 + \left(L.2\pi f - \frac{1}{C.2\pi f}\right)^2\right](C.2\pi f)^2}}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{16\pi^4 L^2C^2f^4 + 4\pi^2C\left(R'^2C - 2L\right)f^2 + 1}}$$

Đặt : $Y = 16\pi^4L^2C^2f^4 + 4\pi^2C(R'^2C - 2L)f^2 + 1$

thì U_{DE} : Max $\leftrightarrow$ Y : Min

Đặt $\begin{cases} 16\pi^4L^2C^2 = a > 0 \\ 4\pi^2C(R'^2 - 2L) = b \\ f^2 = x > 0 \end{cases}$ thì $Y = ax^2 + bx + 1$ với $a > 0$,

Y : Min $\leftrightarrow$ $x = -\frac{b}{2a}$

$$x = -\frac{4\pi^2C(R'^2 - 2L)}{21.6\pi^4L^2C^2} = \frac{2L - R'^2C}{8\pi^2LC}$$

Vậy $f = \sqrt{x} = \frac{1}{2\pi L} \cdot \sqrt{\frac{2L - R'^2C}{2C}}$ với $R' = R + r$

$$= \frac{1}{2\pi \times 0,01} \cdot \sqrt{\frac{2.0,01 - 31^2.5,1.10^{-6}}{2.5,1.10^{-6}}} = 612\,(Hz)$$

Lúc đó : $Z_L = L.2\pi f = 0{,}01.2\pi.612 = 38{,}4\ (\Omega)$

$$Z_C = \frac{1}{C.2\pi f} = \frac{1}{5,1.10^{-6}.2\pi.612} = 51\,(\Omega)$$

$$Z = \sqrt{R'^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{31^2 + (38,4 - 51)^2} = 33,46\,(\Omega)$$

$$U_{DE} = \frac{U}{Z} \times Z_C = \frac{6}{33,46} \times 51$$

$$U_{DE\,(Max)} = 9,145\ (V).$$

6.21 Một cuộn dây có điện trở thuần được mắc vào một mạch điện xoa chiều 110V – 50Hz thì cảm kháng của nó là 122Ω và cường độ dòn điện hiệu dụng qua nó là 0,5A.

a) Tính hệ số tự cảm L và điện trở R của cuộn dây.

b) Mắc cuộn dây trên nối tiếp với tụ điện có điện dung C vào mạch điệ 220V – 50Hz thì cường độ hiệu dụng vẫn là 0,5A. Tính điện dung của tụ điện.

c) Thay đổi tần số của nguồn xoay chiều đến giá trị nào để cường đ dòng điện hiệu dụng trong mạch đạt cực đại ? Tính giá trị cực đại đ nếu hiệu điện thế hiệu dụng trong mạch là 220V.

(ĐH HÀNG HẢI – 9

Giải

a) *Giá trị L và R của cuộn dây :*

- $L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{122}{100\pi} = 0,388535 \approx 0,39\ (H)$

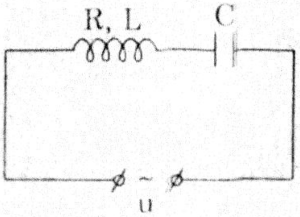
- $Z_d = \frac{U}{I} = \frac{110}{0,5} = 220\ (\Omega)$

$$Z_d = \sqrt{R^2 + Z_L^2}$$

$$R = \sqrt{Z_d^2 - Z_L^2} = \sqrt{220^2 - 122^2} \approx 183\ (\Omega).$$

b) *Giá trị tụ C :*

- $Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{0,5} = 440\ (\Omega)$



$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

$$(Z_L - Z_C)^2 = Z^2 - R^2$$

$$Z_L - Z_C = \pm\sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$Z_C = Z_L \mp \sqrt{Z^2 - R^2} = 122 \mp \sqrt{440^2 - 183^2} = 122 \mp 400,13872$$

Chỉ nhận giá trị $Z_C > 0$ tức :

$$Z_C = 122 + 400,13872 \approx 522\ (\Omega)$$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{522.100\pi} = 6,1.10^{-6}\ F = 6,1\ (\mu F).$$

c) *Tần số f để I : Max :*

- $I : Max \leftrightarrow L2\pi f' = \frac{1}{C.2\pi f'}$

$$\Rightarrow \quad f' = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,39.6,1.10^{-6}}} \approx 103\,(Hz)$$

$$I_{max} = \frac{U}{R} = \frac{220}{183} \approx 1,2\,(A).$$

6.22 Một cuộn dây có điện trở thuần R được mắc vào mạch điện 110V – 50Hz thì cảm kháng của nó là 122Ω và cường độ hiệu dụng qua nó là 0,5A.

a) Tính hệ số tự cảm L và điện trở R của cuộn dây.

b) Mắc cuộn dây trên nối tiếp với tụ điện có điện dung C vào mạch điện 220V – 200Hz thì cường độ hiệu dụng trong mạch vẫn là 0,5A. Tính điện dung C của tụ điện.

c) Thay đổi tần số của nguồn xcay chiều đến giá trị nào để cường độ dòng điện hiệu dụng trong mạch đạt cực đại ? Tính giá trị cực đại đó nếu giá trị hiệu dụng trong mạch là 220V.

(ĐH HÀNG HẢI – 7/97)

Giải

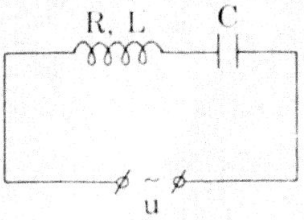
a) *Giá trị L và R của cuộn dây :*

$$+ \quad L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{122}{314} = 0,388535 \approx 0,39\,(H)$$

$$+ \quad Z_{dây} = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \frac{U}{I}$$

$$Z = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - Z_L^2} = \sqrt{\left(\frac{110}{0,5}\right)^2 - 122^2} = 183,07375 \approx 183\,(\Omega).$$

b) *Giá trị C của tụ :*



Với f' = 200Hz thì :

$$+ \quad Z'_L = L.2\pi f' = 0,39.2\pi.200 = 489,84 \approx 490\,(\Omega)$$

$$+ \quad Z = \sqrt{R^2 + (Z'_L - Z_C)^2} = \sqrt{183^2 + (490 - Z_C)^2} \qquad (1)$$

$$\text{Mặt khác :} \quad Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{0,5} = 440\,(\Omega) \qquad (2)$$

(1) và (2) cho : $\sqrt{183^2 + (490 - Z_C)^2} = 440$

$$\Rightarrow \quad (490 - Z_C)^2 = 440^2 - 183^2 = 160111$$

$$490 - Z_C = \pm\, 400{,}13872$$

$$Z_C = 490 \mp 400 = \left[\begin{array}{l} 90\,(\Omega) \\ 890\,(\Omega) \end{array}\right.$$

- Với $Z_C = 90\ (\Omega)$ thì : $C_1 = \dfrac{1}{Z_C.\omega'} = \dfrac{1}{90.2\pi.200} = 8{,}8.10^{-6}(F) = 8{,}8$ (

- Với $Z_C = 890\ (\Omega)$ thì : $C_2 = \dfrac{1}{890.2\pi.200} = 0{,}9.10^{-6}(F) = 0{,}9\ (\mu F)$.

c) *Tần số f'' để I : Max :*

I : Max ↔ $L.2\pi f'' = \dfrac{1}{C.2\pi f''}$ (cộng hưởng điện)

$$\leftrightarrow \quad f'' = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}39.C}}$$

+ Với $C = 8{,}8.10^{-6}$ F thì : $f'' = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{0{,}39.8{,}8.10^{-6}}} \approx 86\ (Hz)$

+ Với $C = 0{,}9.10^{-6}$ F thì : $f'' = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{0{,}39.0{,}9.10^{-6}}} \approx 269\ (Hz)$

+ Cả hai trường hợp : $I_{max} = \dfrac{U}{R} = \dfrac{220}{183} \approx 1{,}2\ (A)$.

6.23 Một tụ điện C mắc nối tiếp với một cuộn dây và cả hai được mắc vào cực AB của một nguồn xoay chiều có hiệu điện thế cực đại $U_{max} = 150\sqrt{2}$ (Đo hiệu điện thế giữa hai bản của tụ điện và giữa hai đầu của cuộn bằng vôn kế nhiệt có điện trở vô cùng lớn ta lần lượt được $U_C = 7$($U_L = 200V$.

a) Xác định hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai điểm A, B.

So sánh kết quả với tổng $U_C + U_L$ đã đo được và giải thích.

b) Cuộn dây có điện trở thuần không ? Tại sao ?

c) Đo cường độ dòng điện I trong mạch bằng ampe kế nhiệt có điện không đáng kể ta thấy I = 0,4A.

Xác định dung kháng của tụ điện, tổng trở của cuộn dây và điện thuần của cuộn dây.

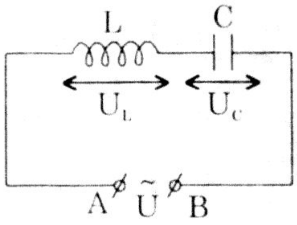
d) Thay đổi tần số của nguồn điện nhưng không làm thay đổi hiệu điện thế cực đại của nguồn, đồng thời mắc thêm một tụ điện có điện dung $C_0 = 2\mu F$ song song với tụ C đã cho, người ta thấy khi tần số của nguồn bằng 500Hz thì dòng điện hiệu dụng trong mạch đạt cực đại. Xác định điện dung của tụ điện C.

(ĐH BÁCH KHOA HÀ NỘI - 96)

Giải

a) *Hiệu điện thế hiệu dụng U_{AB} – so sánh với $U_C + U_L$:*

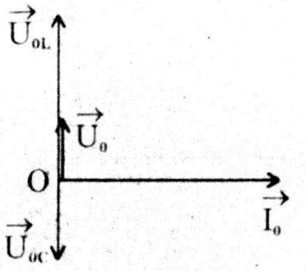
- $U_{AB} = \dfrac{U_{max}}{\sqrt{2}} = 150(V) < U_C + U_L = 270\ (V)$


L
C
U_L
U_C
A
$\tilde{U}$
B

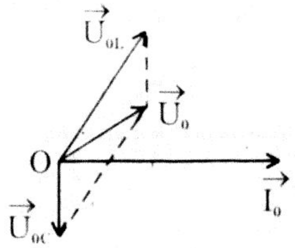
- Có : $u_{AB} = u_L + u_C$

$$\begin{array}{ccccc} u_{AB} & = & u_L & + & u_C \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \overrightarrow{U_0} & = & \overrightarrow{U_{0L}} & + & \overrightarrow{U_{0C}} \end{array}$$

Ta có giản đồ :


$\overrightarrow{U_{0L}}$
$\overrightarrow{U_0}$
O
$\overrightarrow{I_0}$
$\overrightarrow{U_{0C}}$

H.1 : Cuộn dây không có R


$\overrightarrow{U_{0L}}$
$\overrightarrow{U_0}$
O
$\overrightarrow{I_0}$
$\overrightarrow{U_{0C}}$

H.2 : Cuộn dây có R

(H1) : $U_0 = |U_{0L} - U_{0C}| < U_{0L} + U_{0C}$

(H2) : $U_0 < U_{0L} + U_{0C}$

Vậy cả hai trường hợp ta đều có : $U_0 < U_{0L} + U_{0C}$

hay : $U_{AB} < U_L + U_C$.

b) *Cuộn dây có điện trở thuần không ?*

Nếu cuộn dây không có điện trở thuần thì theo (H1) :

$U_{AB} = U_L - U_C = 200 - 70 = 130\ (V)$: trái giả thiết

Vậy : cuộn dây có điện trở thuần R.

c) *Dung kháng – tổng trở cuộn dây – điện trở cuộn dây :*

- $Z_C = \dfrac{U_C}{I} = \dfrac{70}{0,4} = 175(\Omega)$
- $Z_d = \dfrac{U_L}{I} = \dfrac{200}{0,4} = 500(\Omega)$

- $Z_{AB} = \dfrac{U_{AB}}{I} = \dfrac{150}{0,4} = 375\,(\Omega)$

$$\begin{cases} Z_d = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = 500 \\ Z_{AB} = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = 375 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_d^2 = R^2 + Z_L^2 = 500^2 & (1) \\ Z_{AB}^2 = R^2 + (Z_L - Z_C)^2 = 375^2 & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2)$: $\quad 2Z_LZ_C - Z_C^2 = 500^2 - 375^2$

$$2Z_L.175 - 175^2 = 500^2 - 375^2$$

$$Z_L = \frac{500^2 - 375^2 + 175^2}{2.175} = 400\,(\Omega)$$

(1) : $\quad R^2 + 400^2 = 500^2 \quad \Rightarrow \quad R = 300\ (\Omega).$

d) *Điện dung tụ C :*

- Gọi C' là điện dung tương đương của C và C_0 mắc song song :

$$C' = C + C_0$$

có : $\quad L.2\pi f' = \dfrac{1}{C'.2\pi.f'}$ (cộng hưởng điện)

$$\Rightarrow \quad LC' = \frac{1}{(2\pi f')^2} = \frac{1}{(2\pi.500)^2} = \frac{10^{-6}}{\pi^2} \approx 10^{-7} \quad (\text{lấy } \pi^2 \approx 10) \qquad (3)$$

- Theo câu c) : $\quad Z_L.Z_C = 400.175$

$$L\omega \cdot \frac{1}{C\omega} = 7.10^{-4}$$

$$\frac{L}{C} = 7.10^4 \qquad (4)$$

$$\frac{(3)}{(4)} : \quad \frac{LC'}{\frac{L}{C}} = \frac{10^{-7}}{7.10^4} = \frac{10^{-11}}{7}$$

$$C.C' = \frac{10^{-11}}{7}$$

$$C(C + C_0) = \frac{10^{-11}}{7}$$

$$C^2 + C_0C - \frac{10^{-11}}{7} = 0$$

$$C^2 + 2.10^{-6}C - \frac{10^{-11}}{7} = 0$$

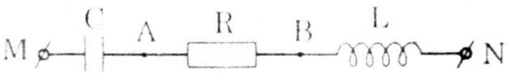
$$\Delta' = (10^{-6})^2 + \frac{10^{-11}}{7} = \left(\sqrt{\frac{17}{7}}.10^{-6}\right)^2$$

$$C = -10^{-6} \pm \sqrt{\frac{17}{7}}.10^{-6}$$

Chỉ nhận giá trị dương : $C \approx 0,56\ (\mu F)$.

.24 Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ :

$R = 100\Omega$; $L = \frac{1}{\pi}$; $C = \frac{10^{-4}}{\pi}$ F.



1. Cho $u_{MN} = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V)

a) Tìm Z_L, Z_C, Z_{MN}, Z_{MB}, Z_{AN}.

b) Viết các biểu thức i, u_C, u_L, u_R.

2. Giữ nguyên giá trị R, L, C, U_{MN} nhưng cho f thay đổi. Hãy xác định f để :

a) Giá trị hiệu dụng U_R đạt cực đại.

b) Giá trị hiệu dụng U_C đạt cực đại.

(ĐH THĂNG LONG – 96)

Giải

a) *Các giá trị của Z_L, Z_C, Z_{MN}, Z_{MB}, Z_{AN} :*

- $Z_L = L\omega = \frac{1}{\pi}.100\pi = 100\ (\Omega)$
- $Z_C = \frac{1}{C.\omega} = \frac{1}{\frac{10^{-4}}{\pi}.100\pi} = 100\ (\Omega)$
- $Z_{MB} = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}\ (\Omega)$
- $Z_{AN} = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}\ (\Omega)$
- $Z_{MN} = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{100^2 + 0} = 100\ (\Omega)$.

b) *Biểu thức i, u_C, u_L, u_R :*

- u_{MN} và i lệch pha góc φ cho bởi :

$$\text{tg}\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = 0 \rightarrow \quad \varphi = 0 : \text{i cùng pha u}$$

và : $I_0 = \dfrac{U_0}{Z_{MN}} = \dfrac{100\sqrt{2}}{100} = \sqrt{2}$ (A)

Vậy : $i = \sqrt{2}\sin 100\pi t$ (A)

- $U_{0C} = I_0.Z_C = \sqrt{2}.100 = 100\sqrt{2}$ (V)

  u_C trễ pha hơn i góc $\dfrac{\pi}{2}$ nên : $u_C = 100\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ (V)

- $U_{0L} = I_0.Z_L = \sqrt{2}.100 = 100\sqrt{2}$ (V)

  u_L sớm pha hơn i góc $\dfrac{\pi}{2}$ nên : $u_L = 100\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (V)

- $U_{0R} = I_0.R = \sqrt{2}.100 = 100.\sqrt{2}$ (V)

  u_R cùng pha với i nên : $u_R = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t)$ (V).

2. a) ***Giá trị f để U_R đạt cực đại :***

$U_R = I.R$

U_R : Max $\leftrightarrow$ I : Max

$\leftrightarrow$ $L.2\pi f = \dfrac{1}{C.2\pi f}$ (cộng hưởng điện)

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{\pi}.\frac{10^{-4}}{\pi}}} = 50 \text{ (Hz)}.$$

b) Giá trị f để U_C đạt cực đại :

$$U_C = I.Z_C = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L.2\pi f - \frac{1}{C.2\pi f}\right)^2}} \times \frac{1}{C.2\pi f}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{16\pi^4 L^2C^2f^4 + 4\pi^2C(R^2C - 2L)f^2 + 1}}$$

U_C : Max $\leftrightarrow$ Mẫu số : Min

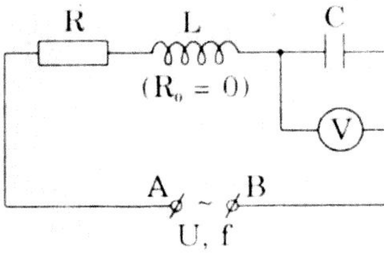
$$\Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{\frac{2L - 2R^2C}{2C}} = \frac{1}{2\pi.\frac{1}{\pi}}\sqrt{\frac{2.\frac{1}{\pi} - 100^2.\frac{10^{-4}}{\pi}}{2.\frac{10^{-4}}{\pi}}}$$

$f = 25\sqrt{2} = 35,35$ (Hz).

Dạng 8 : ĐỘ CHỈ CỰC ĐẠI CỦA VÔN KẾ MẮC GIỮA HAI ĐẦU TỤ

- Độ chỉ vôn kế mắc giữa hai đầu tụ : $U_V = I.Z_C = \dfrac{U}{Z}.Z_C$
- Đưa U_V về dạng một phân số trong đó biến số nằm ở mẫu số.
- U_V đạt cực đạt khi mẫu số đạt cực tiểu.
- Một số trường hợp đặc biệt có thể dùng giản đồ vectơ.

Ví dụ 1 : Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ. Biết R = 31(Ω); L = 0,01 (H); C = 5,1 (μF) ; U không đổi mặc dù tần số f thay đổi. Hỏi f bằng bao nhiêu để độ chỉ vôn kế Ⓥ cực đại, biết $R_V = \infty$.



Giải

- $U_V = I.Z_C = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L.2\pi f - \dfrac{1}{C.2\pi f}\right)^2}}.\dfrac{1}{C.2\pi f}$

$$= \frac{U}{\sqrt{\left[R^2 + \left(L.2\pi f - \dfrac{1}{C.2\pi f}\right)^2\right]C^2.4\pi^2.f^2}}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{16\pi^4L^2C^2f^4 + 4\pi^2C(R^2C - 2L)f^2 + 1}}$$

- U_V : Max $\leftrightarrow$ $A = 16\pi^4L^2C^2f^4 + 4\pi^2C(R^2C - 2L)f^2 + 1$ đạt cực tiểu.

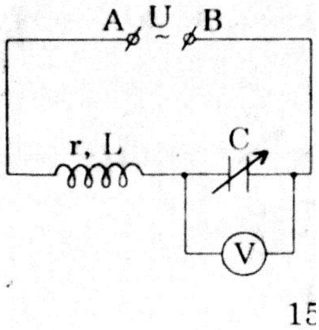
Đặt $\begin{cases} 16\pi^4L^2C^2 = a \\ 4\pi^2C(R^2C - 2L) = b \\ f^2 = x \end{cases}$ thì $A = ax^2 + bx + 1$ với a > 0 nên :

A : Min $\leftrightarrow$ $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2L - R^2C}{8\pi^2L^2C}$.

$$\Rightarrow \quad f = \sqrt{x} = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{\frac{2L - R^2C}{2C}} \approx 613\ (Hz).$$

Ví dụ 2 : Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ, trong đó : $L = \dfrac{0,4}{\pi}$ (H) ; r = 40 (Ω) ;

$R_V = \infty$; $u_{AB} = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V).



Thay đổi điện dung C đến 1 giá trị C_0 nào đó thì vôn kế Ⓥ chỉ cực đại. Tính giá trị cực đại của vôn kế Ⓥ và C_0.

Giải

- $U_V = I.Z_C = \dfrac{U}{\sqrt{r^2+\left(Z_L-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{U}{\sqrt{\omega^2(r^2+Z_L^2)C^2-2Z_L.\omega.C+1}}$ (*)

- U_V : Max $\leftrightarrow$ $A = \omega^2(r^2+Z_L^2)C^2-2Z_L\omega C+1$: Min

(có dạng $A = ax^2+bx+c$)

vì $a > 0$ nên A : Min $\leftrightarrow$ $x = -\dfrac{b}{2a}$ tức :

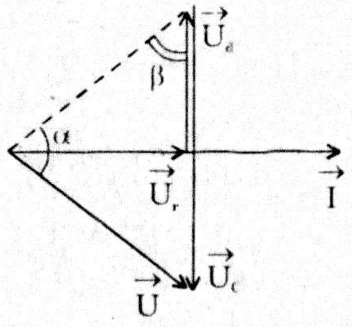
$$C_0 = \frac{Z_L}{\omega(r^2+Z_L^2)} = \frac{10^{-3}}{8\pi}\ (F)$$

- Thay $U = 120V$; $\omega = 100\pi$ rad/s; $r = 40\Omega$; $Z_L = 40\Omega$ và $C = \dfrac{10^{-3}}{8\pi}$ (F)

vào biểu thức (*) :

$$U_{V(max)} = \frac{120}{\sqrt{(100\pi)^2(40^2+40^2)\left(\dfrac{10^{-3}}{8\pi}\right)^2-2.40.100\pi.\dfrac{10^{-3}}{8\pi}+1}} = 170\ (V)$$

Cách khác : Dựa trên giản đồ, ta có :



$$\frac{U_C}{\sin\alpha} = \frac{U}{\sin\beta} \Rightarrow U_C = U.\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Với : $\sin\beta = \dfrac{U_r}{U_d} = \dfrac{r.I}{Z_d.I} = \dfrac{r}{Z_d}$ nên :

$$U_C = U.\frac{Z_d}{r}.\sin\alpha$$

U_C : Max $\leftrightarrow$ $\sin\alpha = 1$, lúc đó :

$$U_{C(Max)} = U.\frac{Z_d}{r} = U.\frac{\sqrt{r^2+Z_L^2}}{r} = 120.\frac{\sqrt{40^2+40^2}}{40} = 120\sqrt{2} \approx 170\ (V)$$

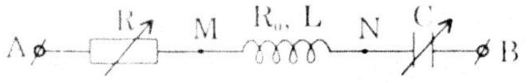
- Vì $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ nên : $U_d = \sqrt{U_C^2-U^2} = 120\ (V)$

$$I = \frac{U_d}{Z_d} = \frac{120}{40\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}A$$

$$Z_C = \frac{U_C}{I} = 80\ (\Omega)$$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{80.100\pi} = \frac{10^{-3}}{8\pi}\ (F)$$

ĐỀ THI



6.25 Cho mạch điện như hình vẽ.

Hiệu điện thế giữa hai đầu A, B là

$u = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t\ (V)$; $L = \frac{1,4}{\pi}\ (H)$; $R_0 = 30\ (\Omega)$.

1. Cho $C = 31,8\ (\mu F)$.

a) Tính giá trị của R để công suất của mạch là cực đại. Viết biểu thức cường độ dòng điện khi đó.

b) Tính giá trị của R để công suất của điện trở R là cực đại. Tính giá trị cực đại đó.

2. Cho $R = 20\Omega$, thay đổi điện dung C. Xác định giá trị của C để hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu tụ là cực đại. Tìm giá trị cực đại đó.

(ĐH NGOẠI THƯƠNG – HÀ NỘI 7/97)

Giải

1.a) *Giá trị R để công suất mạch cực đại – Biểu thức i :*

- $P = I^2(R + R_0) = \dfrac{U^2}{(R + R_0)^2 + (Z_L - Z_C)^2}.(R + R_0)$

$$= \frac{U^2}{(R + R_0) + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R + R_0}}$$

$$P : \text{Max} \quad \Leftrightarrow \quad (R + R_0) + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R + R_0} : \text{Min}$$

$$\text{Vì} \begin{cases} (R + R_0) \text{ và } \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R + R_0} \text{ đều không âm} \\ (R + R_0) \times \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R + R_0} = (Z_L - Z_C)^2 : \text{không đổi} \end{cases}$$

nên tổng số của chúng không đổi khi và chỉ khi :

$$R + R_0 = \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R + R_0} \quad \Leftrightarrow \quad (R + R_0)^2 = (Z_L - Z_C)^2$$

$$R = |Z_L - Z_C| - R_0 \quad \text{với} \quad \begin{cases} Z_L = L\omega = \dfrac{1,4}{\pi}.100\pi = 140\,(\Omega) \\ Z_C = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{31,8.10^{-6}.100\pi} = 100\,(\Omega) \end{cases}$$

nên : $R = (140 - 100) - 30 = 10\ (\Omega)$

- Lúc đó (*) cho : $P_{max} = \dfrac{U^2}{2(R + R_0)} = \dfrac{100^2}{2.40} = 125\ (W)$

- Biểu thức cường độ dòng điện : $I = I_0\sin(\omega t - \varphi)$

Với : + $Z = \sqrt{(R + R_0)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{2(R + R_0)^2} = 40\sqrt{2}\ (\omega)$

+ $I_0 = \dfrac{U_0}{Z} = \dfrac{100\sqrt{2}}{40\sqrt{2}} = 2,5\ (A)$

+ $tg\varphi = \dfrac{Z_L - Z_C}{R + R_0} = 1 \rightarrow \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}$

Vậy : $i = 2,5\sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{4}\right)\ (A).$

b) Giá trị của R để công suất trên R đạt cực đại :

- $P_R = I^2.R = \dfrac{U^2}{(R + R_0)^2 + (Z_L - Z_C)^2} \times R = \dfrac{U^2}{\dfrac{R^2 + R_0^2 + 2RR_0}{R} + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R}}$

$$= \frac{U^2}{2R_0 + \left[R + \dfrac{R_0^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R}\right]}$$

P_R : Max $\Leftrightarrow \quad R + \dfrac{R_0^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R}$: Min

$\Leftrightarrow \quad R = \dfrac{R_0^2 + (Z_L - Z_C)}{R}$

$\Leftrightarrow \quad R = \sqrt{R_0^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{30^2 + (140 - 100)^2} = 50\ (\Omega)$

- Lúc đó (**) cho : $P_{R(max)} = \dfrac{U^2}{2R_0 + 2R} = \dfrac{U^2}{2(R_0 + R)} = \dfrac{100^2}{2 \times 80} = 62,5\ (W).$

2. *Giá trị C để hiệu điện thế giữa hai đầu tụ cực đại :*

$$U_C = I.Z_C = \frac{U}{\sqrt{(R+R_0)^2 + \left(Z_L - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \times \frac{1}{C\omega}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{\left[(R+R_0)^2 + \left(Z_L - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]C^2\omega^2}}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{\left[(R+R_0)^2 + Z_L^2\right]\omega^2C^2 - 2Z_L\omega C + 1}}$$

U_C : Max ⇔ $f(C) = \left[(R+R_0)^2 + Z_L^2\right]\omega^2C^2 - 2Z_L\omega C + 1$ đạt giá tr

cực tiểu

Đặt $\begin{cases} a = \left[(R+R_0)^2 + Z_L^2\right]\omega^2 \\ b = -2Z_L\omega \end{cases}$ thì : $f(C) = aC^2 + bC + 1$: Min

$$\Leftrightarrow \quad C = -\frac{b}{2a} = \frac{-2Z_L\omega}{2\left[(R+R_0)^2 + Z_L^2\right]\omega^2} = \frac{Z_L}{\left[(R+R_0)^2 + Z_L^2\right]\omega}$$

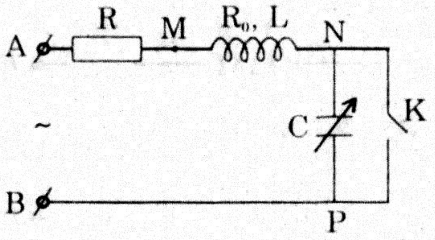
$$= \frac{140}{[50^2 + 140^2] \times 100\pi} \text{ (F)} \approx 20 \text{ (}\mu\text{F)}$$

$$Z_C = \frac{1}{C.\omega} = \frac{1}{20.10^{-6}.100\pi} = 159 \text{ (}\Omega\text{)}$$

$$(***) \Rightarrow U_{C(max)} = \frac{100}{\sqrt{50^2 + (140-159)^2}} \times 159 \approx 297 \text{ (V).}$$

6.26 Cho mạch điện như hình vẽ. Hiệu điện thế giữa hai đầu A, B là :

$u = 300\sin 100\pi t$ (V).



Khóa K và các dây nối có điện trở không đáng kể.

1. Khi đóng khóa K ta thấy :

$U_{AM} = U_R = 100$ (V)

$U_{MN} = U_d = 50\sqrt{10}$ (V).

Công suất của cuộn dây MN là 100 (W). Tính các giá trị R_0, L.

2. Khi ngắt khóa K.

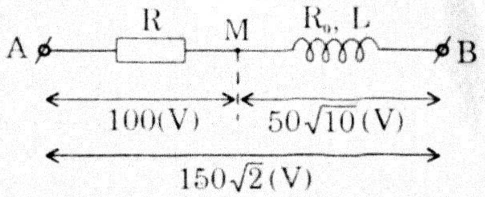
a) Thay đổi điện dung C để công suất của mạch là cực đại. Tính giá trị C khi đó và tìm giá trị cực đại của công suất.

b) Thay đổi điện dung C với hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu tụ U_C là cực đại. Tính giá trị C khi đó và tìm $U_{C(max)}$.

(ĐH NGOẠI THƯƠNG – TP.HCM – 7/97)

Giải

1. *K đóng : Tính R, R_0, L :*



K đóng, dòng điện khi qua tụ C nên mạch điện gồm R và cuộn dây mắc nối tiếp giữa A – B :

+ Áp dụng định luật ôm :

$$I = \frac{U_{AM}}{R} = \frac{U_{MB}}{\sqrt{R_0^2 + Z_L^2}} = \frac{U_{AB}}{\sqrt{(R + R_0)^2 + Z_L^2}}$$

và công suất tiêu thụ trên cuộn dây : $P = I^2.R_0 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{P}{R_0}}$

+ Do 2 hệ thức trên ta lần lượt rút ra được :

- $\frac{U_{AM}}{R} = \sqrt{\frac{P}{R_0}}$

$$\frac{100}{R} = \sqrt{\frac{100}{R_0}} \Rightarrow R = 10\sqrt{R_0} \quad (1)$$

- $\frac{U_{MB}}{\sqrt{R_0^2 + Z_L^2}} = \sqrt{\frac{P}{R_0}}$

$$\frac{50\sqrt{10}}{\sqrt{R_0^2 + Z_L^2}} = \sqrt{\frac{100}{R_0}} \Rightarrow R_0^2 + Z_L^2 = 250R_0 \quad (2)$$

- $\frac{U_{AB}}{\sqrt{(R + R_0)^2 + Z_L^2}} = \sqrt{\frac{P}{R_0}}$

$$\frac{150\sqrt{2}}{R^2 + 2RR_0 + (R_0^2 + Z_L^2)} = \sqrt{\frac{100}{R_0}} \quad (3)$$

Từ (1) và (2) ta thay $R = 10\sqrt{R_0}$ và $R_0^2 + Z_L^2 = 250R_0$ vào (3) :

$$\frac{150\sqrt{2}}{\sqrt{100R_0 + 20R_0\sqrt{R_0} + 250R_0}} = \frac{10}{\sqrt{R_0}}$$

Bình phương 2 vế : $150R_0 = 350R_0 + 20R\sqrt{R_0}$

$$\Rightarrow \quad 100R_0 = 20R_0\sqrt{R_0} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{R_0} = 5$$

$$\Rightarrow \quad R_0 = 25\ (\Omega)$$

- (1) → $R = 50\ (\Omega)$
- (2) → $Z_L^2 = 250R_0 - R_0^2 = 250.25 - (25)^2 = 5625$

$$Z_L = 75\ (\Omega)$$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{75}{100\pi} = 0{,}2388535 \approx 0{,}24\ (H).$$

2. *K ngắt :*

a) *Tính C và công suất cực đại :*

- P : Max ↔ I : Max

$$\leftrightarrow \quad Z_C = Z_L = 75\ (\Omega) \quad \text{(cộng hưởng điện)}$$

$$\leftrightarrow \quad C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{75.100\pi} = 42{,}5.10^{-6}\ (F) = 42{,}5\ (\mu F)$$

- $P_{max} = \dfrac{U^2}{R + R_0} = \dfrac{(150\sqrt{2})^2}{50 + 25} = 600\ (W)$

b) *U_C : Max. Tìm giá trị C :*

$$U_C = I.Z_C = \frac{U}{\sqrt{(R + R_0)^2 + \left(Z_L - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} \times \frac{1}{C.\omega} \qquad (4)$$

$$= \frac{U}{\sqrt{\left[(R + R_0)^2 + \left(Z_L^2 - 2Z_L.\dfrac{1}{C.\omega} + \dfrac{1}{(C\omega)^2}\right)\right] \times (C\omega)^2}}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{\omega^2\left[(R + R_0)^2 + Z_L^2\right]C^2 - 2Z_L\omega C + 1}}$$

$$U_C = \text{Max} \quad \leftrightarrow \quad A = \omega^2\left[(R + R_0)^2 + Z_L^2\right]C^2 - 2Z_L\omega C + 1 : \text{Min}$$

(có dạng $A = ax^2 + bx + c$)

Vì a > 0 nên A : Min $\leftrightarrow \quad x = -\dfrac{b}{2a}$ tức :

$$C = \frac{2Z_L\omega}{2\omega^2\left[(R + R_0)^2 + Z_L^2\right]} = \frac{Z_L}{\omega\left[(R + R_0) + Z_L^2\right]} = \frac{75}{100\pi(75^2 + 75^2)}$$

$$= 21{,}2.10^{-6}\ (F) = 21{,}2\ (\mu F)$$

Thay $\dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{C.100\pi} = 150\ (\Omega)$ cùng các giá trị đã biết vào (4) :

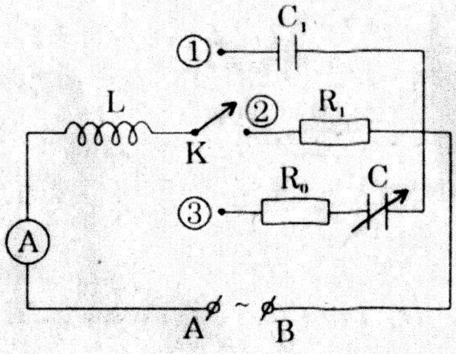
$$U_{C(max)} = \frac{150\sqrt{2}}{\sqrt{75^2 + (75 - 150)^2}} \times 150 = 300\ (V).$$

6.27 Cho mạch điện như hình vẽ với :

$U_{AB} = 220V$; $f = 50Hz$;

ampe kế có điện trở rất nhỏ ;

$L = \dfrac{0,5}{\pi} N$; $C_1 = 100\mu F$; $R_0 = 40\Omega$.



1. Khi khóa K ở vị trí (1) số chỉ ampe kế gấp 4 lần khi khóa K ở vị trí (2).

Tìm R_1 và công suất tiêu thụ trong hai trường hợp khi khóa K ở vị trí (1) và (2).

2. Để khóa K ở vị trí (3). Thay đổi điện dung C, xác định giá trị của C trong hai trường hợp sau :

a) Ampe kế chỉ cực đại.

b) Hiệu điện thế trên hai đầu tụ C đạt cực đại.

(ĐH KIẾN TRÚC HÀ NỘI – 7/97)

Giải

1. ***R_1 và công suất K ở (1) và (2) :***

$$Z_L = L\omega = \frac{0,5}{\pi}.100\pi = 50\ (\Omega)$$

- $$Z_{C_1} = \frac{1}{C_1.\omega} = \frac{1}{100.10^{-6}.100\pi} = \frac{100}{\pi} \approx 31,8\ (\Omega)$$
- Khi K ở (1) : Mạch điện có L và C_1 mắc nối tiếp nên độ chỉ ampe kế :

$$I_1 = \frac{U}{Z_L - Z_C} = \frac{220}{50 - 31,8} = \frac{220}{18,2}\ (A)$$

- Khi K ở (2), mạch có L và R_1 mắc nối tiếp nên độ chỉ ampe kế :

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + Z_L^2}} = \frac{220}{\sqrt{R_1^2 + 50^2}}$$

Vì $I_2 = \dfrac{1}{4} I_1$ nên : $\dfrac{220}{\sqrt{R_1^2 + 50^2}} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{220}{18,2}$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{R_1^2 + 50^2} = 4.18,2 = 72,8 \quad \Rightarrow \quad R_1 \approx 53\ (\Omega)$$

- K ở vị trí (1), cả L và C_1 đều không tiêu thụ công suất nên : $P_1 = 0$.
- K ở (2), công suất tiêu thụ là :

$$P_2 = I_2^2.R_1 = \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{220}{18.2}\right)^2 \times 53 = 484\ (W).$$

2.a) *Giá trị C để ampe kế chỉ cực đại :*

K ở (3), mạch có L, R_0 và C mắc nối tiếp.

$$I : \text{Max} \leftrightarrow \quad Z_C = Z_L = 50$$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{50.100\pi}\ (F) = 63{,}7\ (\mu F).$$

b) *Giá trị C để U_C cực đại :*

$$U_C = I.Z_C = \frac{U}{\sqrt{R_0^2 + \left(Z_L - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \times \frac{1}{C\omega} = \frac{U}{\sqrt{\left[R_0^2 + \left(Z_L - \frac{1}{C\omega}\right)\right]C^2\omega^2}}$$

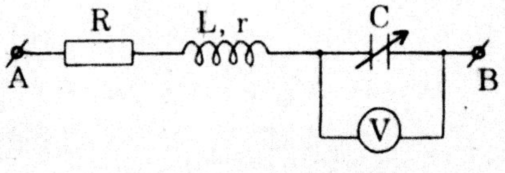
$$= \frac{U}{\sqrt{(R_0^2 + Z_L^2)\omega^2C^2 - 2Z_L\omega C + 1}}$$

$$U_C : \text{Max} \leftrightarrow \quad f(C) = (R_0^2 + Z_L^2)\,\omega^2C^2 - 2Z_L\omega C + 1 : \text{Min}$$

$$\leftrightarrow \quad C = +\frac{2Z_L\omega}{2(R_0^2 + Z_L^2)\omega^2} = \frac{Z_L}{(R_0^2 + Z_L^2)\omega} = \frac{50}{(40^2 + 50^2).100\pi}$$

$$= \frac{50}{4100.100\pi}\ (F) = 38{,}8\ (\mu F).$$

6.28 Mạch điện xoay chiều ở hình vẽ có :



$U_{AB} = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t\ (V)$,

$R = 80\Omega, \quad r = 20\Omega, \quad L = \frac{2}{\pi}H,$

Tụ C có điện dung biến đổi được. Điện trở vôn kế rất lớn. Hãy xác định diện dung C trong các trường hợp sau :

a) Cường độ dòng điện trễ pha hơn U_{AB} một góc $\frac{\pi}{4}$. Viết biểu thức cường độ dòng điện, tính công suất mạch.

b) Công suất mạch cực đại. Tính giá trị cực đại này.

c) Vôn kế có số chỉ cực đại. Tính số chỉ cực đại này.

(ĐH SƯ PHẠM VINH – 97)

Giải

a) *Giá trị C. Biểu thức I và công suất khi i trễ pha hơn u góc $\frac{\pi}{4}$:*

- $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{Z_L - Z_C}{R + r}$$

$$Z_L - Z_C = (R + r)\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

$$Z_C = Z_L - (R + r)\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

với $Z_L = L\omega = \frac{2}{\pi}.100\pi = 200\ (\Omega)$ nên :

$$Z_C = 200 - (80 + 20) \times 1) = 100\ (\Omega)$$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{100.100\pi} = \frac{10^{-4}}{\pi}(F).$$

- I trễ pha hơn U góc $\frac{\pi}{4}$ nên : $i = I_0\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$

Có $\cos\varphi = \frac{R + r}{Z} \Rightarrow Z = \frac{R + r}{\cos\varphi} = \frac{100}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 100\sqrt{2}\ (\Omega)$

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{120\sqrt{2}}{100\sqrt{2}} = 1,2\ (A)$$

Vậy : $i = 1,2\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ (A)

$$P = I^2.(R + r) = \left(\frac{1,2}{\sqrt{2}}\right)^2.100 = 72\ (W).$$

b) *Giá trị C khi cực đại :*

- $P = I^2.(R + r)$

$P : Max \Leftrightarrow I : Max$

$\Leftrightarrow Z_C = Z_L = 200\Omega$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{200.100\pi} = \frac{10^{-4}}{2\pi}\ (F)$$

- Lúc đó : $P_{max} = I^2_{max}(R + r) = \left(\frac{U}{R + r}\right)^2(R + r) = \frac{U^2}{R + r} = \frac{120^2}{100} = 144\ (W).$

c) Giá trị C để vôn kế chỉ cực đại :

Độ chỉ vôn kế :

$$U_C = I.Z_C = \frac{U}{\sqrt{(R+r)^2 + \left(Z_L - \dfrac{1}{C\omega}\right)}} \times \frac{1}{C\omega} \qquad (*)$$

$$= \frac{U}{\sqrt{\left[(R+r)^2 + \left(Z_L - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2\right]C^2\omega^2}}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{\left[(R+r)^2 + Z_L^2\right]\omega^2C^2 - 2Z_L\omega C + 1}}$$

U_C : Max khi mẫu số cực tiểu , mà số hạng trong căn thức của mẫu số có dạng $ax^2 + bx + c$ nên có giá trị cực tiểu khi $x = -\frac{b}{2a}$ tức :

$$C = \frac{Z_L\omega}{\left[(R+r)^2 + Z_L^2\right]\omega^2} = \frac{Z_L}{\left[(R+r)^2 + Z_L^2\right]\omega}$$

$$= \frac{200}{(100^2 + 200^2).100\pi} = \frac{2.10^{-4}}{5\pi}$$

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{\dfrac{2.10^{-4}}{5\pi}.100\pi} = 250\ (\Omega)$$

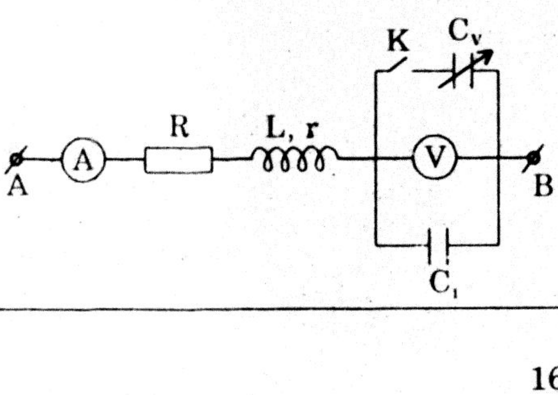
$$(*) \Rightarrow U_C = \frac{120}{\sqrt{100^2 + (200-250)^2}} \times 250 = 120\sqrt{5} \approx 268\ (V).$$

6.29 Cho đoạn mạch như hình vẽ trong đó $R = 50\Omega$, cuộn dây có độ tự cảm L và điện trở thuần $r = 14\Omega$.

Tụ $C_1 = 16\mu F$. Tụ C_V có điện dung thay đổi được. Ⓥ là vôn kế nhiệt có điện trở rất lớn. Ⓐ là ampe kế nhiệt có điện trở rất nhỏ. Khóa K và các dây nối có điện trở không đáng kể. Đặt vào hai đầu đoạn mạch một hiệu điện thế có biểu thức :

$$U(t) = 141\sin\pi t\ (V).$$

1. Cho $C_V = 24\mu$ người ta thấy ampe kế chỉ cùng một giá trị khi K đóng cũng như mở. Hãy tính độ tự cảm L.



2. Viết biểu thức của cường độ dòng điện i (t) trong mạch khi K đóng và K mở.

3. Khóa K đóng, hãy xác định giá trị của C_V sao cho :

a) Số chỉ của ampe kế cực đại.

b) Số chỉ của vôn kế cực đại.

Giải

1. Độ tự cảm L :

- K đóng : C_1 và C_V mắc song song nên :

$$C = C_1 + C_V = 16 + 24 = 40\ (\mu F)$$

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{40.10^{-6}.120\pi} = 66{,}35\ (\Omega)$$

Độ chỉ ampe kế khi K đóng : .. $I = \dfrac{U}{\sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$

- K mở : $Z_{C_1} = \dfrac{1}{C_1\omega} = \dfrac{1}{16.10^{-6}.120\pi} = 165{,}87\ (\Omega)$

Độ chỉ ampe kế : $I' = \dfrac{U}{\sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$

- Vì $I = I' \Rightarrow (Z_L - Z_C)^2 = (Z_L - Z_{C_1})^2$

và vì $Z_C \neq Z_{C_1}$ nên : $Z_L - Z_C = -(Z_L - Z_{C_1})$

$$\Rightarrow Z_L = \frac{Z_C + Z_{C_1}}{2} = \frac{66{,}35 + 165{,}87}{2} = 116\ (\Omega)$$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{116}{120\pi} = 0{,}308\ (H).$$

2. Biểu thức i(t) khi K đóng và K mở :

- K đóng : $i_t = I_0\sin(120\pi t - \varphi_1)$

với : $I_0 = \dfrac{U_0}{\sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \dfrac{141}{\sqrt{(50+14)^2 + (116 - 66{,}35)^2}}$

$$= \frac{141}{81} = 1{,}74\ (A)$$

$$\text{tg}\varphi_1 = \frac{Z_L - Z_C}{R + r} = \frac{116 - 66{,}35}{50 + 14} = 0{,}776$$

$$\varphi_1 = \text{arctg}0{,}776$$

Vậy : $i_d = 174\sin(120\pi t - \mathrm{arctg}0,776)$ (A).

- K mở : Vì độ chỉ ampe kế không đổi tức I_0 không đổi nên :

$$I_m = I_0\sin(120\pi t - \varphi_2)$$

với : $$\mathrm{tg}\varphi_2 = \frac{Z_L - Z_C}{R + r} = \frac{116 - 165,87}{50 + 14} = -0,776$$

$$\varphi_2 = -\mathrm{arctg}0,776$$

Vậy : $i_2 = 174\sin(120\pi t + \mathrm{arctg}0,776)$ (A).

3.a) ***Giá trị C_V sao cho số chỉ ampe kế cực đại :***

I : Max $\leftrightarrow$ $Z_C = Z_L = 116\ (\Omega)$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{116.120\pi} = 22,9.10^{-6}\ (F)$$

Mà : $C = C_1 + C_V$ (C_1 và C_V mắc song song)

$C_V = C - C_1 = 22,9 - 16 = 6,9\ (\mu F)$.

b) ***Giá trị C_V sao cho số chỉ (V) cực đại :***

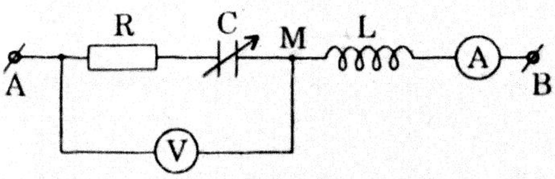
$$U_V = I.Z_C = \frac{U}{\sqrt{(R + r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \times Z_C$$

U_V : Max $\leftrightarrow$ $C = \dfrac{Z_L}{\left[(R + r)^2 + Z_L^2\right]\omega}$ (Chứng minh giống bài trên)

$$C = \frac{116}{[(50 + 14)^2 + 116^2] \times 120\pi} = 17,5.10^{-6}\ (F)$$

với : $C = C_1 + C_V$ $\Rightarrow$ $C_V = C - C_1 = 17,5 - 16 = 1,5\ (\mu F)$.

6.30 Cho mạch điện xoay chiều như hình bên với :



$U_{AB} = 100\sqrt{2}\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{6}\right)$,

$L = \dfrac{0,6}{\pi}$ (H) ; tụ C biến đổi được, vôn kế có điện trở vô cùng lớn ; ampe kế có điện trở không đáng kể.

1. Hệ số công suất của đoạn mạch AM và của toàn mạch bằng nhau và bằng 0,8. Tìm R, C và viết biểu thức cường độ dòng điện.
2. Điều chỉnh C để ampe kế chỉ giá trị cực đại. Tìm số chỉ của ampe kế, vôn kế và viết biểu thức cường độ dòng điện khi đó.

(ĐH LUẬT HÀ NỘI - 98)

Giải

1. *Giá trị R – C và biểu thức i :*

- Hệ số công suất : $$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad Z_C^2 = (Z_L - Z_C)^2$$

Vì $Z_L \neq 0$ nên :

$$Z_C = Z_L - Z_C \quad \rightarrow \quad Z_C = \frac{Z_L}{2} = \frac{L\omega}{2} = \frac{\frac{0,6}{\pi}.100\pi}{2} = 30\ (\Omega)$$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{30.100\pi} = \frac{10^{-3}}{3\pi}\ (F).$$

- Với $\cos\varphi = 0,8$: $$(1) \rightarrow 0,8 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 30^2}}$$

$$0,64R^2 + 0,64.30^2 = R^2$$

$$R^2 = 1600 \quad \Rightarrow \quad R = 40\ (\Omega)$$

- Có : $$i = I_0 \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{6} - \varphi\right)$$

với : + $$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{40^2 + (60 - 30)^2} = 50\ (\Omega)$$

+ $$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{100\sqrt{2}}{50} = 2\sqrt{2}\ (A)$$

+ $$tg\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{60 - 30}{40} = \frac{3}{4}$$

$$\varphi \approx 37^0 = \frac{37\pi}{180}\ (rad)$$

Vậy : $$i = 2\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{6} - \frac{37\pi}{180}\right) = 2\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{67\pi}{180}\right)\ (A).$$

2. ***Độ chỉ ampe kế – vôn kế và biểu thức i khi ampe kế chỉ cực đại :***

- $$I : Max \leftrightarrow \quad Z_C = Z_L = 60\Omega$$

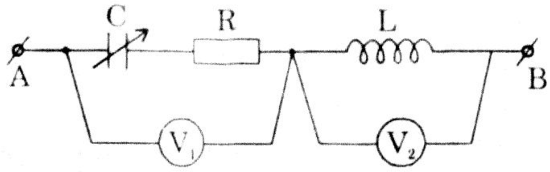
Lúc đó $$I_{max} = \frac{U}{R} = \frac{100}{40} = 2,5\ (A)$$

- Độ chỉ vôn kế : $$U_V = I_{max}\sqrt{R^2 + Z_C^2} = 2,5\sqrt{40^2 + 60^2} = 180,3\ (V)$$

- Vì $Z_C = Z_L$ nên $\text{tg}\varphi = \frac{Z_C - Z_L}{R} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$: i và u cùng pha

Vậy : $i = 2,5\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ (A).

6.31 Cho mạch điện như hình vẽ với C là tụ điện dung biến đổi, R là điện trở, L là cuộn cảm thuần. Các vôn kế nhiệt có điện trở vô cùng lớn,



$U_{AB} = 220\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V).

1 Ban đầu cho $C = \frac{1}{3\pi}.10^{-3}$F thì số chỉ của vôn kế (V_1) là $220\sqrt{3}$ V, của (V_2) là 220V. Tính R và L.

2. Thay đổi giá trị tụ điện C so với giá trị ban đầu ở câu 1, hỏi số chỉ vôn kế (V_2) và (V_1) thay đổi thế nào ?

(HỌC VIỆN KĨ THUẬT QUÂN SỰ – 98)

Giải

1. Giá trị R và L :

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{\frac{1}{3\pi}.10^{-3}.100\pi} = 30\ (\Omega)$$

$$\begin{cases} U_1 = I\sqrt{R^2 + Z_C^2} = I\sqrt{R^2 + 30^2} & (1) \\ U_2 = I.Z_L & (2) \\ U = I\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = I\sqrt{R^2 + (Z_L - 30)^2} & (3) \end{cases}$$

(1) và (2) : $\frac{U_1}{U_2} = \frac{\sqrt{R^2 + 30^2}}{Z_L}$

$$\frac{220\sqrt{3}}{220} = \frac{\sqrt{R^2 + 30^2}}{Z_L} \Rightarrow R^2 + 30^2 = 3Z_L^2 \quad (4)$$

(2) và (3) : $\frac{U^2}{U} = \frac{Z_L}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$

$$\frac{220}{220} = \frac{Z_L}{\sqrt{R^2 + (Z_L - 30)^2}} \Rightarrow R^2 + (Z_L - 30)^2 = Z_L^2 \quad (5)$$

(4) – (5) cho : $3Z_L^2 - 60Z_L = 0$

Vì $\quad Z_L \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Z_L = 20\ (\Omega)$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{20}{100\pi} = \frac{0,2}{\pi}\ (H)$$

$$(4) \Rightarrow \quad R^2 = 3Z_L^2 - 30^2 = 3.20^2 - 30^2$$

$$R = 10\sqrt{3} \approx 17,3\ (\Omega).$$

2. *Thay đổi số chỉ của vôn kế (V_2) và (V_1) :*

- Độ chỉ (V_2) : $\quad U_2 = I.Z_L = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \times Z_L$

Đặt : $y = R^2 + (Z_L - Z_C)^2 = (10\sqrt{3})^2 + (20 - Z_C)^2$

$y' = -2(20 - Z_C)$

$y' = 0 \quad \leftrightarrow \quad Z_C = 20\Omega \ ; \qquad C = \dfrac{1}{20.100\pi} = \dfrac{10^{-3}}{2\pi}F$

$y' > 0 \quad \leftrightarrow \quad 20 - Z_C < 0 \quad \leftrightarrow \quad Z_C > 20\ (\Omega)$

Ta có bảng biến thiên của U_2 theo C :

$Z_C\ (\Omega)$	0		20		30		∞
C (F)	∞		$\frac{10^{-3}}{2\pi}$		$\frac{10^{-3}}{3\pi}$		0
y'		–	0	+		+	
y		↘	Min	↗		↗	
$U_2 = \frac{U}{\sqrt{y}} \cdot Z_L$		↗	Max	↘		↘	

Qua bảng ta có kết luận về sự biến thiên của (V_2) như sau :

- Từ giá trị ban đầu $\left(C = \dfrac{10^{-3}}{3\pi}F\right)$, C giảm đến 0 (tức Z_C tăng đến ∞) thì U_2 giảm dần đến 0.

- Từ giá trị ban đầu, C tăng đến $\dfrac{10^{-3}}{2\pi}F$ (tức $Z_C = 20\Omega$) thì U_2 tăng từ 220V đến 254 (V) (max) ; tiếp tục tăng C thì U_2 lại giảm cho đến $U_2 = 166,3$ (V) khi $C \to \infty$.

- Độ chỉ (V_1): $U_1 = I\sqrt{R^2 + Z_C^2} = U.\dfrac{\sqrt{R^2 + Z_C^2}}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = U\sqrt{\dfrac{300 + Z_C^2}{300 + (20 - Z_C)^2}}$

Đặt $y = \dfrac{300 + Z_C^2}{300 + (20 - Z_C)^2} = \dfrac{u}{V}$

với : $u = 300 + Z_C^2 \quad \rightarrow \quad u' = 2Z_C$

$V = 300 + (20 - Z_C)^2 \rightarrow \quad V' = -2(20 - Z_C)$

thì : $y' = \dfrac{u'V - uV'}{V^2} = \dfrac{-40Z_C^2 + 800Z_C + 12000}{[300 + (20 - Z_C)^2]}$

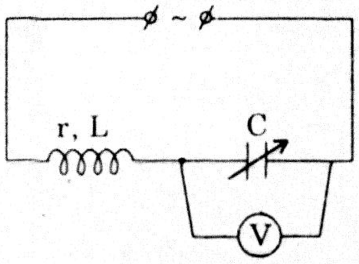
$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_C^2 - 20Z_C - 300 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_C = \left[\begin{array}{l} -10 \\ 30 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên của U^2 theo C :

Z_C	-10		0		30		∞
C	▨	▨			$\frac{10^{-3}}{3\pi}$		
y'	▨	▨		+	0	−	
y	▨	▨		↗	Max	↘	
$U_1 = U\sqrt{y}$	▨	▨		↗	Max	↘	

Qua bảng ta thấy : Kể từ giá trị ban đầu $\left(C = \dfrac{10^{-3}}{3\pi}F\right)$ dù tăng hay giảm C đều làm U_1 giảm so với giá trị lúc đầu $(220\sqrt{3}V)$.

6.32 Một đoạn mạch gồm một cuộn dây có độ tự cảm $L = \dfrac{0,4}{\pi}H$, điện trở $r = 40\Omega$ mắc nối tiếp với một tụ điện biến đổi C. Đặt giữa hai đầu mạch điện một hiệu điện thế xoay chiều $u = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V).



a) Khi tu điện có điện dung $C = C_0$, dòng điện trong mạch biến thiên sớm pha $\dfrac{\pi}{6}$ so với hiệu điện thế hai đầu mạch điện. Tìm điện dung C_0, cường độ hiệu dụng trong mạch và số chỉ của vôn kế nhiệt Ⓥ.

b) Thay đổi điện dung C đến một giá trị để số chỉ V là cực đại. Tìm số chỉ của vôn kế, cường độ hiệu dụng trong mạch lục này và giá trị điện dung đó. Cho $R_V \rightarrow \infty$.

(ĐH LUẬT HÀ NỘI - 96)

Giải

a) ***Giá trị C_0, I và số chỉ vôn kế Ⓥ:***

i sớm pha hơn u góc $\frac{\pi}{6}$ tức $\varphi = -\frac{\pi}{6}$

Có : • $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{Z_L - Z_{C_0}}{r} \quad \Rightarrow \quad Z_{C_0} = Z_L - r.\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Với : $Z_L = L\omega = \frac{0,4}{\pi}.100\pi = 40\ (\Omega)$

nên : $Z_{C_0} = 40 + 40.\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 63,1(\Omega)$

$$C_0 = \frac{1}{Z_{C_0}.\omega} = \frac{1}{63,1.100\pi} = 50,4.10^{-6}\ (F) = 50,5\ (\mu F)$$

- $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{r}{Z} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{r}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{40}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{80}{\sqrt{3}}\ (\Omega)$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{120}{\frac{80}{\sqrt{3}}} = \frac{120\sqrt{3}}{80} = 2,598\ (A)$$

- $U_V = I.Z_{C_0} = 2,598.63,1 \approx 163,9\ (V).$

b) ***Số chỉ của vôn kế Ⓥ – cường độ hiệu dụng và giá trị C :***

- $U_V = I.Z_C = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \times Z_C = \frac{U}{\sqrt{\left[r^2 + \left(Z_L - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]C^2\omega^2}} = \frac{U}{\sqrt{y}}$

Với $y = \left[r^2 + \left(Z_L - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]C^2\omega^2 = (r^2 + Z_L)\omega^2C^2 - 2Z_L\omega C + 1$

U_V : **Max** ↔ y : **Min**

$$\leftrightarrow \quad C = \frac{Z_L}{(r^2 + Z_L^2)\omega} = \frac{40}{(40^2 + 40^2).100\pi} = 39,8\ (\mu F)$$

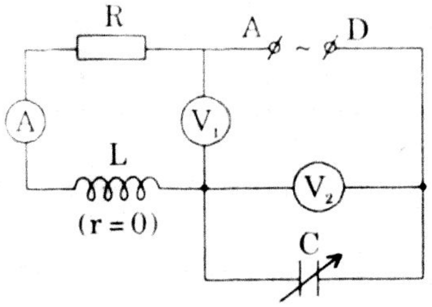
Lúc đó : $Z_C = \frac{1}{C\omega} = 80\ (\Omega).$

- Cường độ hiệu dụng :

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{120}{\sqrt{40^2 + (40 - 80)^2}} = 2,12\ (A)$$

- $U_{V(max)} = I.Z_C = 2,12.80 = 169,6\ (V).$

6.33 Cho mạch điện như hình vẽ với $U_{AD} = 200\sqrt{2}\sin 2\pi ft$ (V). Điện trở ampe kế rất nhỏ và có điện trở vôn kế rất lớn. Vôn kế (V_1) chỉ 100V, vôn kế (V_2) chỉ $200\sqrt{2}$ V, ampe kế (A) chỉ $\sqrt{2}$ A.



a) Chứng minh rằng $R \neq 0$ và tìm R.

b) Thay đổi tần số dòng điện trong mạch đến $f_1 = \dfrac{100}{\sqrt{2}}$ Hz thì ampe kế có giá trị cực đại. Tìm tần số dòng ban đầu, hệ số tự cảm L và điện dung C.

c) Viết biểu thức của dòng điện trong mạch.

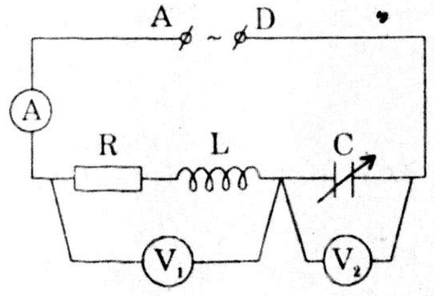
d) Dòng điện trong mạch đang có tần số ban đầu f. Thay đổi R thành $R_1 = 30\Omega$, thay đổi L thành L_1. Sau đó mới thay đổi điện dung C thì thấy vôn kế (V_2) thay đổi và đạt giá trị cực đại khi $C = \dfrac{10^{-4}}{\pi}$ F. Tìm giá trị L_1.

(ĐH KIẾN TRÚC – HÀ NỘI – 96)

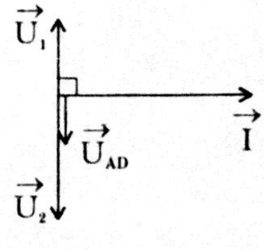
Giải

a) Giá trị R :

Mạch điện được vẽ lại :



- Nếu R = 0 thì ta có giản đồ vectơ :



Lúc đó : $U_{AD} = U_2 - U_1$: trái giả thiết.

(Vì $U_{AD} = 200V$; $U_2 - U_1 = 200\sqrt{2} - 200 = 82,8V$)

Vậy : $R \neq 0$.

- $$\begin{cases} Z_C = \dfrac{U^2}{I} = \dfrac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 200\,(\Omega) \\ Z = \dfrac{U_{AD}}{I} = \dfrac{200}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}\,(\Omega) \\ Z_{RL} = \dfrac{U_1}{I} = \dfrac{200}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}\,(\Omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - 200)^2} = 100\sqrt{2}\,(\Omega) \\ Z_{RL} = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = 100\sqrt{2}\,(\Omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R^2 + (Z_L - 200)^2 = R^2 + Z_L^2 = (100\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow \quad Z_L = 100\,(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad R = 100\,(\Omega).$$

b) *Giá trị tần số f – L và C :*

- Với tần số $f_1 = \dfrac{100}{\sqrt{2}}$ Hz có cộng hưởng nên :

$$L.2\pi f_1 = \frac{1}{C.2\pi f_1} \quad \Rightarrow \quad LC = \frac{1}{4\pi^2 f_1^2} = \frac{1}{2.10^4\pi^2} \qquad (1)$$

- Với tần số f, thao kết quả câu a) : $Z_L.Z_C = 100.200 = 2.10^4$

hay : $L.2\pi f\dfrac{1}{C.2\pi f} = 2.10^4 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{L}{C} = 2.10^4$ (2)

(1) × (2) cho : $L^2 = \dfrac{1}{\pi^2} \quad \Rightarrow \quad L = \dfrac{1}{\pi} \approx 0{,}318\ (H)$

$$(2) \Rightarrow \quad C = \frac{10^{-4}}{2\pi}(F) \quad \text{Và :} \quad Z_L = L.2\pi f$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{Z_L}{2\pi L} = \frac{100}{2\pi.\dfrac{1}{\pi}} = 50\ (Hz).$$

c) *Biểu thức dòng điện trong mạch :*

$$i = I_0\sin(100\pi t - \varphi)$$

với : $I_0 = (\sqrt{2})\sqrt{2} = 2(A)$

$$tg\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{100 - 200}{100} = -1 \quad \rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

Vậy : $i = 2\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)(A)$.

d) *Giá trị L_1 :*

Độ chỉ vôn kế ⓥ₂ :

$$U_2 = I.Z_C = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + \left(Z_{L_1} - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} \times \frac{1}{C\omega} = \frac{U}{\sqrt{\left[R_1^2 + \left(Z_{L_1} - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2\right]C^2\omega^2}}$$

$$U_2 = \frac{U}{\sqrt{(R_1^2 + Z_{L_1}^2)\omega^2C^2 - 2Z_{L_1}\omega C + 1}} = \frac{U}{\sqrt{y}}$$

với : $y = (R_1^2 + Z_{L_1}^2)\omega^2C^2 - 2Z_{L_1}\omega C + 1$ (có dạng $y = ax^2 + bx + c$)

U_2 : Max $\leftrightarrow$ y : Min

$$\leftrightarrow \quad C = -\frac{b}{2a} = \frac{Z_{L_1}}{(R_1^2 + Z_{L_1}^2)\omega}$$

$$(R_1^2 + Z_1^2)\omega C - Z_{L_1} = 0$$

$$\omega C Z_{L_1}^2 - Z_{L_1} + R_1^2\omega C = 0$$

$$100\pi\frac{10^{-4}}{\pi}Z_{L_1}^2 - Z_{L_1} + 30^2.100\pi\frac{10^{-4}}{\pi} = 0$$

$$Z_{L_1}^2 - 100Z_{L_1} + 900 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} Z_{L_1} = 90\,(\Omega) \\ Z_{L_1} = 10\,(\Omega) \end{array}\right. \Rightarrow \quad L_1 = \left[\begin{array}{l} \dfrac{0,9}{\pi}\,(H) \\ \dfrac{0,1}{\pi}\,(H). \end{array}\right.$$

Dạng 9 : ĐỘ CHỈ CỰC ĐẠI CỦA VÔN KẾ MẮC GIỮA HAI ĐẦU CUỘN CẢM

- Độ chỉ vôn kế mắc giữa hai đầu cuộn cảm :

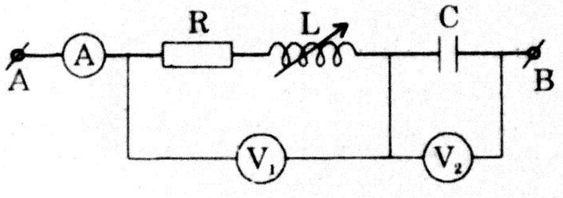
$$U_V = I.Z_{dây} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}.Z_{dây}$$

- Đưa U_V về dạng $\sqrt{\dfrac{u}{V}}$ (u và V chứa L)
- Lấy đạo hàm của $y = \dfrac{u}{V}$ theo L : $y' = \dfrac{u'V - uV'}{V^2}$
- Cho y' = 0 và tính được L.

ĐỀ THI

6.34 Cho mạch điện như hình vẽ.

Hiệu điện thế giữa 2 đầu A và B là : $u = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V) ta thấy ampe kế chỉ 0,5A, vôn kế ⓥ V_2 chỉ 100V.



Dòng điện trong mạch trễ pha $\frac{\pi}{3}$ so với hiệu điện thế. Coi ampe kế có điện trở không đáng kể và điện trở của vôn kế rất lớn.

1. Tìm R, L, C và số chỉ của vôn kế (V_1).

2. Cho L thay đổi.

a) Tìm giá trị L để công suất mạch cực đại.

b) Tìm giá trị L để vôn kế (V_1) chỉ cực đại.

(HỌC VIỆN QUAN HỆ QUỐC TẾ – 97)

Giải

1. *Giá trị R – L – C và số chỉ vôn kế* (V_1) *:*

$$+ \quad Z_C = \frac{U_2}{I} = \frac{100}{0,5} = 200\,(\Omega)$$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{200.100\pi} = \frac{10^{-4}}{2\pi}(F) = 15,9\,(\mu F)$$

$$+ \quad tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{Z_L - Z_C}{R} \quad \Rightarrow \quad Z_L - Z_C = R\sqrt{3}$$

$$\text{và :} \quad Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{U}{I}$$

$$\sqrt{R^2 + (R\sqrt{3})^2} = \frac{100}{0,5} = 200 \quad \Rightarrow \quad R = 100$$

$$+ \quad (1) \Rightarrow \quad Z_L = Z_C + R\sqrt{3} = 200 + 100\sqrt{3} = 373,2\,(\Omega)$$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{373,2}{100\pi} \approx 1,19\,(H).$$

+ Độ chỉ vôn kế (V_1) : $U_1 = I\sqrt{R^2 + Z_L^2} = 0,5\sqrt{100^2 + 373,2^2} = 193,2\,(V)$

2.a) *Giá trị L để công suất mạch cực đại :*

$$P = I^2.R$$

$$P : Max \leftrightarrow \quad I : Max$$

$$\leftrightarrow \quad Z_L = Z_C = 200\,(\Omega) \quad \text{(cộng hưởng điện)}$$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{200}{100\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0,636\,(H).$$

b) *Giá trị L để V_1 chỉ cực đại :*

+ Độ chỉ vôn kế (V_1) :

$$U_1 = I.Z_{LR} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \times \sqrt{R^2 + Z_L^2} = U \times \sqrt{\frac{R^2 + Z_L^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

+ Xét : $y = \frac{R^2 + Z_L^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{100^2 + x^2}{100^2 + (x - 200)^2}$ với $Z_L = x$

$$= \frac{10^4 + x^2}{x^2 - 400x + 5.10^4} = \frac{u}{V}$$

Lấy đạo hàm của y đối với x, ta được : $y' = \frac{u'V - uV'}{V^2}$

với : $\begin{cases} u = 100^2 + x^2 \rightarrow u' = 2x \\ V = x^2 - 400x + 5.10^4 \rightarrow V' = 2x - 400 \end{cases}$

nên : $y' = \frac{2x(x^2 - 400x + 5.10^4) - (100^2 + x^2)(2x - 400)}{(x^2 - 400x + 5.10^4)^2}$

$$= \frac{400(-x^2 + 200x + 10^4)}{(x^2 - 100x + 5.10^4)^2}$$

+ Ta có : $U_1 = U\sqrt{y}$

Để : U_1 : Max thì y : Max

Muốn vậy : $y' = 0 \Rightarrow -x^2 + 200x + 10^4 = 0$

$\Rightarrow x = 100 \pm 100\sqrt{2}$

Chỉ nhận : $x = Z_L = 100 + 100\sqrt{2}$

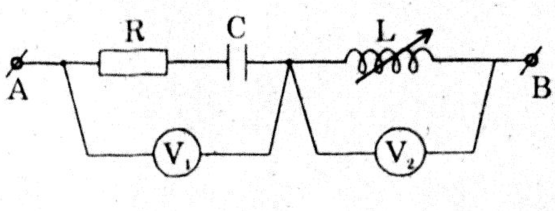
hay : $Z_L = 241,4\ (\Omega)$

$\rightarrow L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{241,4}{100\pi} = 0,768\ (H).$

6.35 Cho mạch điện như hình vẽ với :

$U_{AB} = 100\sqrt{3}\sin 100\pi t$ (V).

Các vôn kế nhiệt (V₁), (V₂) có điện trở vô cùng lớn.



1. Với giá trị ban đầu xác định của R, L, C số chỉ của vôn kế (V₁), (V₂) lần lượt là $U_1 = 100\sqrt{3}$ V, $U_2 = 50\sqrt{2}$ V.

Công suất tiêu thụ trên mạch là $P = 100\sqrt{2}$ W. Tính R, L, C khi đó.

2. Giữ nguyên giá trị của R, C và thay đổi L ta thấy :

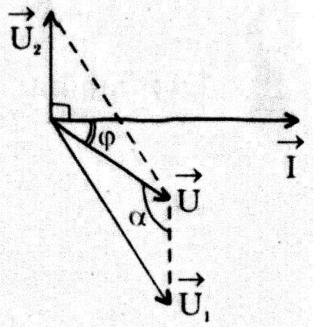
a) Khi $L = L_1$ vôn kế (V$_1$) chỉ giá trị cực đại. Tính L_1 và công suất P_1 trên mạch khi đó.

b) Khi $L = L_2$ vôn kế (V$_2$) chỉ giá trị cực đại. Tính L_2 và số chỉ của V_2 khi đó.

(HỌC VIỆN KĨ THUẬT QUÂN SỰ – 97)

Giải

1. *Giá trị R – L – C :*



- Có :

$$\begin{matrix} U_{AB} & = U_1 & + U_2 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \vec{U} & = \vec{U}_1 & + \vec{U}_2 \end{matrix}$$

Ta vẽ được giản đồ như hình vẽ bên.

Ta có : $U_1^2 = U_2 + U_2^2 - 2U.U_2.\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{U^2 + U_2^2 - U_1^2}{2U.U_2} \qquad \text{với} \quad U = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{6} \ (\text{V})$$

$$= \frac{(50\sqrt{6})^2 + (50\sqrt{2})^2 - (100\sqrt{3})^2}{2.50\sqrt{6}.50\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

($\cos\alpha < 0$ nên α là góc tù như hình vẽ).

Mặt khác : $\cos\varphi = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Công suất : $P = UI\cos\varphi \quad \rightarrow \quad I = \frac{P}{U\cos\varphi} = \frac{100\sqrt{2}}{50\sqrt{6}.\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{2}$ (A)

và $\quad P = I^2R$

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{100\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = 50\sqrt{2} \ (\Omega)$$

- Có : $U_2 = L\omega.I$

$$L = \frac{U_2}{\omega I} = \frac{50\sqrt{2}}{100\pi.\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi} \ (\text{H})$$

$$U_1 = \sqrt{R^2 + Z_C^2}.I$$

$$R^2 + Z_C^2 = \left(\frac{U_1}{I}\right)^2$$

$$Z_C = \sqrt{\left(\frac{U_1}{I}\right)^2 - R^2} = \sqrt{\left(\frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 - (50\sqrt{2})^2} = 100\ (\Omega)$$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{100.100\pi} = \frac{10^{-4}}{\pi}\ (F).$$

2.a) *Giá trị L_1 và P_1 :*

Độ chỉ $\textcircled{V_1}$: $$U_1 = I.Z_{RC} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}.Z_{RC}$$

$$U_1 : \text{Max} \rightarrow \quad Z_{L_1} = Z_L = Z_C = 100$$

$$L_1 = \frac{Z_{L_1}}{\omega} = \frac{100}{100\pi} = \frac{1}{\pi}\ (H)$$

Lúc đó : $I = I_{max} = \dfrac{U}{R}$

Công suất tiêu thụ :

$$P_1 = I^2_{max}.P = \frac{U^2}{R^2}.R = \frac{U^2}{R} = \frac{(50\sqrt{6})^2}{50\sqrt{2}} = 150\sqrt{2}\ (W).$$

b) *Giá trị L_2 và số chỉ $\textcircled{V_2}$:*

Độ chỉ vôn kế $\textcircled{V_2}$:

$$U_2 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \times Z_L = U\sqrt{\frac{Z_L^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \qquad (1)$$

Xét : $y = \dfrac{Z_L^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \dfrac{u}{V}$

$$\text{với : } \begin{cases} u = Z_L^2 \rightarrow u' = 2Z_L \\ V = R^2 + (Z_L - Z_C)^2 \rightarrow V' = 2(Z_L - Z_C) \end{cases}$$

$$y' = \frac{u'V - uV'}{V^2} = \frac{2Z_L[R^2 + (Z_L - Z_C)^2] - Z_L^2.2(Z_L - Z_C)}{[R^2 + (Z_L - Z_C)^2]^2}$$

$$U_2 : \text{Max} \quad \leftrightarrow \quad y : \text{Max} \quad \leftrightarrow \quad y' = 0$$

$$2Z_L[R^2 + (Z_L - Z_C)^2] - Z_L^2.2(Z_L - Z_C) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2Z_L(R^2 + Z_C^2 - Z_LZ_C) = 0$$

$$Z_L \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Z_L = \frac{R^2 + Z_C^2}{Z_C} = \frac{(50\sqrt{2})^2 + 100^2}{100} = 150\ (\Omega)$$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{150}{100\pi} = \frac{1,5}{\pi}\ (H).$$

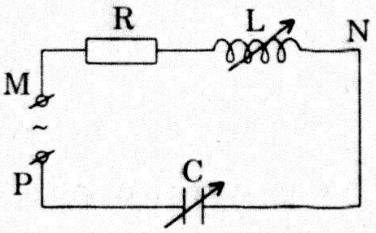
$$(1) \rightarrow \quad U_{2(max)} = 50\sqrt{6}\sqrt{\frac{150^2}{(50\sqrt{2})^2 + (150-100)^2}} = 150\sqrt{2}\ (V).$$

6.36 Cho mạch điện như hình vẽ. Giá trị biên độ của hiệu điện thế giữa hai điểm M và P luôn luôn là $U_0 = 200\sqrt{2}$ V, tần số của dòng điện trong mạch là f, cuộn dây thuần cảm kháng có độ tự cảm L, tụ điện có điện dung C.

1. Với f = 50Hz, có giá trị L_1, C có giá trị C_1, mắc lần lượt một vôn kế nhiệt (có điện trở vô cùng lớn) vào hai điểm M, N rồi N, P ta thấy số chỉ của vôn kế theo thứ tự là

$U_1 = 340V$ và $U_2 = 180V$.

Lúc này công suất tiêu thụ của mạch điện P = 80W.



a) Chứng tỏ rằng $R \neq 0$ và tính R.

b) Tính L_1, C_1.

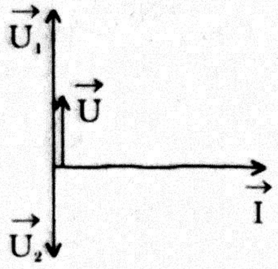
2. Với các giá trị L_1, C_1 vừa tìm được ở câu 1, ta thay đổi tần số dòng điện f trong mạch sao cho hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu điện trở R đạt giá trị cực đại. Khi đó tính giá trị của f.

3. Nếu f vẫn có giá trị 50Hz, ta điều chỉnh C để có giá trị C_2, sau đó điều chỉnh L đến giá trị $L_2 = \frac{6,4}{\pi}$ H thì thấy hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu cuộn dây đạt giá trị lớn nhất U_{Lmax}. Hãy tính C_2 và U_{Lmax}.

(ĐH SƯ PHẠM, HÀ NỘI 2 – 97)

Giải

1.a) Chứng tỏ $R \neq 0$ và giá trị R :



- Nếu R = 0 thì u_{MN} và u_{NP} ngược pha.

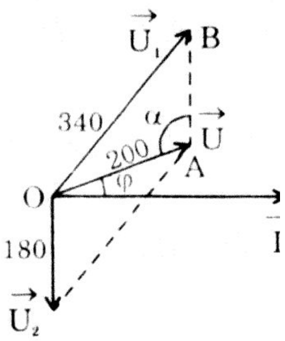
  Lúc đó : $U = U_1 - U_2$: trái giả thiết.

  (Vì U = 200V ; $U_1 - U_2 = 340 - 180 = 160V$)

  Vậy : $R \neq 0$.

- Vì $R \neq 0$ nên $\vec{U}_1$ hợp với trục $\vec{I}$ góc khác $\frac{\pi}{2}$ như hình vẽ.

Dựa vào công thức tính công suất $P = UI\cos\varphi$ ta tính được I nếu biết $\cos\varphi$. Vậy trước hết ta tính $\cos\varphi$.



ΔOAB cho : $OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2OA.AB.\cos\alpha$

$$340^2 = 200^2 + 180^2 - 2.200.280.\cos\alpha$$

$\Rightarrow \quad \cos\alpha = -0,6 < 0$ (α là góc tù)

Mặt khác : $\varphi = \alpha - \dfrac{\pi}{2}$

$$\sin\varphi = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha = 0,6$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = 0,8$$

$$I = \frac{P}{U\cos\varphi} = \frac{80}{200.0,8} = 0,5\ (A)$$

và do : $\quad P = I^2.R \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{P}{I^2} = \dfrac{80}{0,5^2} = 320\ (\Omega).$

b) Giá trị L_1 và C_1 :

- $$Z_{C_1} = \frac{U_2}{I} = \frac{180}{0,5} = 360\,(\Omega)$$

  $$C_1 = \frac{1}{Z_{C_1}.\omega} = \frac{1}{360.100\pi} = 8,85.10^{-6}\ (F) = 8,85\ (\mu F)$$

- $$Z_{MN} = \sqrt{R^2 + Z_{L_1}^2} = \frac{U_1}{I}$$

  $$Z_{L_1} = \sqrt{\left(\frac{U_1}{I}\right)^2 - R^2} = \sqrt{\left(\frac{340}{0,5}\right)^2 - 320^2} = 600\ (\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad L_1 = \frac{Z_{L_1}}{\omega} = \frac{600}{100\pi} = \frac{6}{\pi}\ (H).$$

2. ***Giá trị tần số f để U_R : Max :***

$U_R = I.R$

U_R : Max $\quad \leftrightarrow \quad$ I : Max

$$\leftrightarrow \quad L_1.2\pi f = \frac{1}{C_1.2\pi f}$$

$$\leftrightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\dfrac{6}{\pi}.\dfrac{10^{-3}}{36\pi}}} = \frac{1}{2}\sqrt{6.10^3} \approx 38,7\ (Hz).$$

3. ***Giá trị C_2 và $U_{L(max)}$:***

$$U_L = I.Z_L = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \times Z_L = U\sqrt{\frac{Z_L^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = U\sqrt{y}$$

U_L : Max $\leftrightarrow$ y : Max $\leftrightarrow$ y' = 0

$u = Z_L^2 \rightarrow u' = 2Z_L$

$V = R^2 + (Z_L - Z_C)^2 \rightarrow V' = 2(Z_L - Z_C)$

$$y' = \frac{u'V - uV'}{V^2} = \frac{2Z_L[R^2 + (Z_L - Z_C)^2 - Z_L^2.2(Z_L - Z_C)}{[R^2 + (Z_L - Z_C)^2]^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2Z_L\left[Z_{C_2}^2 - Z_L Z_{C_2} + R^2\right] = 0$$

$$Z_{C_2}^2 - Z_L Z_{C_2} + R^2 = 0$$

với $Z_L = L_1\omega = \dfrac{6,4}{\pi}.100\pi = 640\ (\Omega)$

nên : $Z_{C_2}^2 - 640Z_{C_2} + 320^2 = 0$

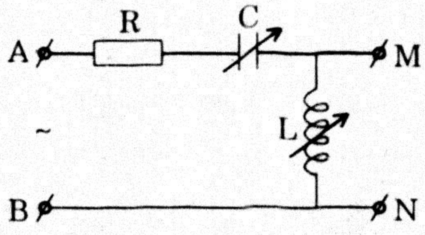
$\Delta' = 0$

$Z_{C_2} = 320\ (\Omega)$

$$\Rightarrow \quad C_2 = \frac{10^{-3}}{32\pi}\ (F).$$

Lúc đó : $U_{L(max)} = 200\sqrt{\dfrac{640^2}{320^2 + 320^2}} = 200\sqrt{2}$ (V).

6.37 Cho mạch điện như hình vẽ, cuộn dây thuần cảm. Đặt vào 2 đầu A, B một hiệu điện thế $u = U\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V).



1. Cho và L một giá trị xác định. Nếu mắc vào hai đầu M, N một ampe kế nhiệt (điện trở không đáng kể) thì ampe kế chỉ 1A, mạch điện có hệ số công suất là 0,8.

Bỏ ampe kế ra và mắc vào hai đầu M, N một vôn kế nhiệt (có điện trở rất lớn) thì vôn kế chỉ 200V, mạch điện có hệ số công suất bằng 0,6. Tính các giá trị U, R, L, C.

2. Thay đổi điện dung đến giá trị mới C' xác định, sau đó thay đổi L thì thấy số chỉ của vôn kế thay đổi và khi cuộn cảm có độ tự cảm L' thì vôn kế chỉ giá trị cực đại bằng 320V. Xác định C' và L' khi đó.

(ĐH NGOẠI THƯƠNG – 98)

Giải

1. *Giá trị U, R, L, C :*

- Khi mắc ampe kế ($R_a = 0$) giữa M, N thì mạch điện có R và C mắc nối tiếp ; theo giả thiết ta có :

$$\begin{cases} \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \dfrac{U}{I} = U & (I = 1A) \\ \cos\varphi = 0,8 = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} \end{cases}$$

hay : $0,8 = \dfrac{R}{U} \Rightarrow U = 1,25R$ (1)

Và : $0,64(R^2 + Z_C^2) = R^2$

$$Z_C = 0,75R \qquad (2)$$

- Khi mắc vôn kế giữa hai đầu M, N, mạch điện có R, L, C mắc nối tiếp.

Hệ số công suất : $0,6 = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$

$$0,36R^2 + 0,36(Z_L - Z_C)^2 = R^2$$

$$(Z_L - Z_C)^2 = \frac{0,64R^2}{0,36}$$

$$|Z_L - Z_C| = \frac{4}{3}R$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z_L - Z_C = \dfrac{4}{3}R \Rightarrow Z_L = Z_C + \dfrac{4}{3}R = \dfrac{25}{12}R \\ Z_C - Z_L = \dfrac{4}{3}R \Rightarrow Z_L = Z_C - \dfrac{4}{3}R = \dfrac{3}{4}R - \dfrac{4}{3}R < 0 : \text{loại} \end{cases}$$

Vậy : $Z_L = \dfrac{25}{12}R$ (3)

Tổng trở mạch điện : $Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\dfrac{4}{3}R\right)^2} = \dfrac{5}{3}R$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{1,25R}{\frac{5}{3}R} = 0,75\ (A)$$

Độ chỉ vôn kế là 200V nên : $U_L = 200 = I.Z_L = 0,75Z_L$

$$Z_L = \frac{200}{0,75} = \frac{800}{3}\ (\Omega)$$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{\frac{800}{3}}{100\pi} = \frac{8}{3\pi}\ \textbf{(F)}$$

(3) $\Rightarrow$ $R = \dfrac{12}{25}Z_L = \dfrac{12}{25} \times \dfrac{800}{3} = 128\ (\Omega)$

$(1) \Rightarrow \quad U = 1{,}25R = 125.128 = 160\ (V)$

$(2) \Rightarrow \quad Z_C = 0{,}75R = 0{,}75.128 = 96\ (\Omega)$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{96.100\pi} = \frac{10^{-2}}{96\pi}\ (F).$$

2. *Giá trị C' và L' khi $U_{L(max)} = 320V$:*

Độ chỉ vôn kế : $U_V = I.Z_L = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \times Z_L$ (*)

$$= U\sqrt{\frac{Z_L^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = U\sqrt{y}$$

Để U_V Max thì $y = \dfrac{Z_L^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \dfrac{x^2}{R^2 + (x - Z_C)^2}$ Max

Muốn vậy thì đạo hàm của y theo x triệt tiêu.

Đặt : $u = x^2 \quad \rightarrow \quad u' = 2x$

$V = R^2 + (x - Z_C)^2 \quad \rightarrow \quad V' = 2(x - Z_C)$

thì $y' = \dfrac{u'V - uV'}{V^2} = \dfrac{2x[R^2 + (x - Z_C)^2] - x^2.2(x - Z_C)}{[R^2 + (x - Z_C)^2]} = 0$

$\Leftrightarrow \quad Z_C^2 - xZ_C + R^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{Z_C^2 + R^2}{Z_C}$ hay $Z_L = \dfrac{Z_C^2 + R^2}{Z_C}$

Thay $Z_L = \dfrac{Z_C^2 + R^2}{Z_C}$ và $Z_L - Z_C = \dfrac{R^2}{Z_C}$ vào (*) :

$$U_{V(max)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{R^2}{Z_C}\right)^2}} \times \frac{Z_C^2 + R^2}{Z_C} = \frac{U}{\sqrt{R^2\,\dfrac{Z_C^2 + R^2}{Z_C^2}}} \times \frac{Z_C^2 + R^2}{Z_C}$$

$$= \frac{U}{R}\sqrt{Z_C^2 + R^2}$$

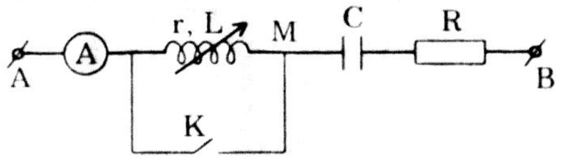
hay : $320 = \dfrac{160}{128}\sqrt{Z_C^2 + 128^2} \quad \Rightarrow \quad Z_C = 221{,}7\ (\Omega)$

$$C = 14{,}36\ (\mu F)$$

và $Z_L = \dfrac{221{,}7^2 + 128^2}{221{,}7} = 295{,}6\,(\Omega)$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{295{,}6}{100\pi} = 0{,}94\ (H).$$

6.38 Cuộn cảm L có điện trở r ghép nối tiếp tụ điện C và điện trở R (hình vẽ). Hiệu điện thế xoay chiều hai đầu mạch điện ổn định :



$$U_{AB} = 200\sqrt{2}\sin 100\pi t \text{ (V)}.$$

Cho R = 50 (Ω), ampe kế, khóa K và dây nối có điện trở không đáng kể.

a) Khi K đóng : ampe kế chỉ 2A. Tính điện dung của tụ C.

b) Khi K ngắt : thay đổi độ tự cảm L của cuộn dây để ampe kế chỉ giá trị cực đại. Biết độ lệch pha giữa hiệu điện thế tức thời u_{AM} và u_{MB} là $\frac{\pi}{2}$. Tính L và r. Viết biểu thức cường độ tức thời qua tụ C.

(ĐHQG – TP.HCM – 98)

Giải

a) *Giá trị điện dung C :*

K đóng : Mạch điện AB có R và C mắc nối tiếp.

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \frac{U}{I}$$

$$Z_C = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} = \sqrt{\left(\frac{200}{2}\right)^2 - 50^2} = 50\sqrt{3}\ (\Omega)$$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{50\sqrt{3}.100\pi} = 36{,}8\ (\mu F).$$

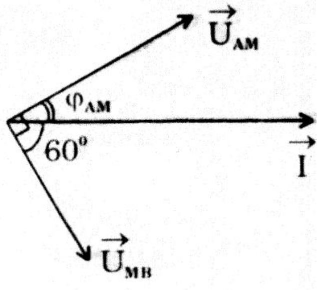
b) *Giá trị L – r và biểu thức i :*

K ngắt : Mạch điện A, B có cuộn dây, C và R nối tiếp.

Độ lệch pha giữa u_{MB} và i là φ_{MB} cho bởi :

$$tg\varphi_{MB} = \frac{-Z_C}{R} = \frac{-50\sqrt{3}}{50} = -\sqrt{3}$$

$$\varphi_{MB} = \frac{-\pi}{3}$$: i sớm pha hơn u_{MB}.



- Xét giản đồ vectơ sau đây để suy ra độ lệch pha giữa u_{AM} và $i(\varphi_{AM})$:

$$\varphi_{AM} = 90^0 - \varphi_{MB} = 90^0 - 60^0 = 30^0$$

- Có $tg\varphi_{AM} = \frac{Z_L}{r} \Rightarrow r = \frac{Z_L}{tg30^0} = \sqrt{3}Z_L$

- **Mà** **I : Max** $\leftrightarrow$ $Z_L = Z_C = 50\sqrt{3}$

$$\rightarrow \quad L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{50\sqrt{3}}{100\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\ (H)$$

và $r = \sqrt{3}.50\sqrt{3} = 150\ (\Omega)$.

- **Vì** $Z_L = Z_C$ $\Rightarrow$ i cùng pha với u_{AB}, vậy : $i = I_0 \sin 100\pi t$ (A).

với $I_{max} = \dfrac{U}{R + r} = \dfrac{200}{50 + 150} = 1A$

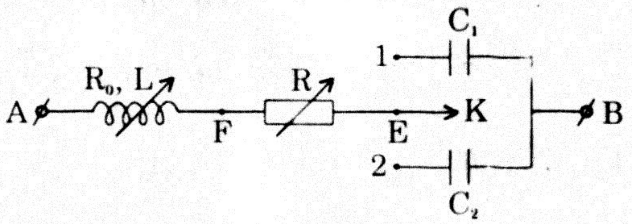
nên : $i = \sqrt{2}\sin 100\pi t$ (A).

6.39 **Cho mạch điện như hình vẽ**

$U_{AB} = 100\sqrt{3}\sin 100\pi t$ (V),

$R_0 = 0$, **độ tự cảm L**

và điện trở R thay đổi được.

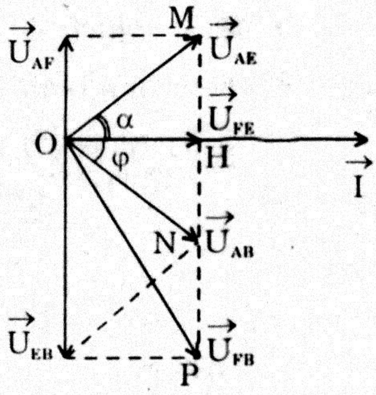


1. **Khi khóa K ở vị trí 1, tự cảm có giá trị L_1, điện trở R có giá trị R_1 thì thấy hiệu điện thế hiệu dụng trên các đoạn : $U_{AE} = 50\sqrt{6}$ V, $U_{EB} = 100\sqrt{2}$ V. Xác định hiệu điện thế hiệu dụng U_{FB} và viết biểu thức hiệu điện thế giữa hai điểm A, E.**
2. **Khi khóa K ở vị trí 2, điện trở R có giá trị $R_2 = 50\sqrt{2}\ \Omega$. Thay đổi tự cảm L cho đến $L = \dfrac{3}{2\pi}$ H thì hiệu điện thế hiệu dụng trên hai đầu cuộn cảm đạt giá trị cực đại. Xác định điện dung C_2.**

(ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC – HÀ NỘI 98)

Giải

1. ***Hiệu điện thế U_{FB} và biểu thức u_{AE} :***



- **Có :** $u_{AB} = u_{AF} + u_{FE} + u_{EB}$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$\vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AF} + \vec{U}_{FE} + \vec{U}_{EB}$$

Ta được giản đồ như hình bên. Chú ý rằng ΔOMN là tam giác cân, trong đó OH là đường cao nên :

$$HM = HN = \frac{MN}{2} = \frac{U_{EB}}{2} = 50\sqrt{2}$$

$$\Delta OHM \rightarrow \quad OH^2 = OM^2 - MH^2 = (50\sqrt{6})^2 - (50\sqrt{2})^2 = 10^4$$

$$OH = 100$$

Đó chính là : $U_{FE} = 100$ (V).

- Có : $u_{FB} = u_{FE} + u_{EB}$

$$\begin{matrix} \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{U}_{FB} & = & \vec{U}_{FE} & + & \vec{U}_{EB} \end{matrix}$$

$\Delta OHP \rightarrow \quad OP^2 = OH^2 + HP^2 = 100^2 + (100\sqrt{2})^2$

$$OP = 100\sqrt{3}$$

hay : $\quad U_{FB} = 100\sqrt{3}$ (V).

$$\Delta OHM \rightarrow \quad tg\alpha = \frac{MH}{OH} = \frac{50\sqrt{2}}{100} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{MON} = 2\alpha = 2.arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Có : pha của u_{AE} = pha của $u_{AB} + 2\alpha = 100\pi t + 2arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

và : $\quad U_{0AE} = U_{AE}\sqrt{2} = (50\sqrt{6})\sqrt{2} = 100\sqrt{3}$ (V)

Vậy $\quad u_{AE} = 100\sqrt{3}\sin\left(100\pi t + 2arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (V).

2. ***Giá trị C_2 :***

$$Có : U_L = I.Z_L = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \times Z_L = U\sqrt{\frac{Z_2^2}{R_2^2 + (Z_L - Z_{C_2})^2}} = U\sqrt{y}$$

U_L : Max $\quad\leftrightarrow\quad$ y : Max $\quad\leftrightarrow\quad$ y' = 0

$$với \quad \begin{cases} u = Z_L^2 \rightarrow u' = 2Z_L \\ V = R_2^2 + (Z_L - Z_{C_2})^2 \rightarrow V' = 2(Z_L - Z_{C_2}) \end{cases}$$

$$y' = \frac{u'V - uV'}{V^2} = \frac{2Z_L\left[R_2^2 + (Z_L - Z_{C_2})^2\right] - Z_L^2.2(Z_L - Z_{C_2})}{\left[R_2^2 + (Z_L - Z_{C_2})^2\right]} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2Z_L\left[Z_2^2 + (Z_L - Z_{C_2})^2 - Z_L(Z_L - Z_{C_2})\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad Z_{C_2}^2 - Z_LZ_C + R_2^2 = 0$$

$$với \quad Z_L = L\omega = \frac{3}{2\pi}.100\pi = 150\ (\Omega)$$

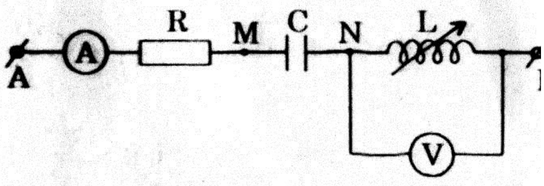
nên : $\quad Z_{C_2}^2 - 150Z_C + (50\sqrt{2})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 50^2$

$$Z_{C_2} = \frac{150 \pm 50}{2} = \left[\begin{array}{l} 100\Omega \\ 50\Omega \end{array}\right.$$

$$\text{Với} \quad Z_{C_2} = 100\Omega \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{10^{-4}}{\pi}\ \mathbf{(F)}$$

$$Z_{C_2} = 50\Omega \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{10^{-3}}{5\pi}\ \mathbf{(F)}.$$

6.40 Cho một mạch điện như hình vẽ.



Cuộn dây thuần cảm, điện trở ampe kế không đáng kể, điện trở vôn kế rất lớn.

Đặt vào hai đầu A, B một hiệu điện thế $u_{AB} = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V).

1. Khi $L = \frac{3}{\pi}$ H thì hiệu điện thế u_{AN} **trễ pha** $\frac{\pi}{3}$ so với u_{AB} và u_{MB} sớ pha $\frac{\pi}{3}$ so với u_{AB}. Tìm R và C.

2. Thay đổi L, tìm giá trị của L để số chỉ ampe kế cực đại, tìm giá trị cụ đại đó.

3. Mắc song song với điện trởi R một điện trở R_0. Thay đổi L, ta thấy s chỉ vôn kế thay đổi và có giá trị cực đại bằng 240V. Tìm điện trở R giá trị L và số chỉ ampe kế khi đó.

(HỌC VIỆN QUAN HỆ QUỐC TẾ – 9

Giải

1. Giá trị R và C :

- Để tìm độ lệch pha giữa u_{AN} với dòng điện i (φ_{AN}) và độ lệch pha giữ u_{MB} với dòng điện i (φ_{MB}) ta vẽ giản đồ vectơ của chúng.

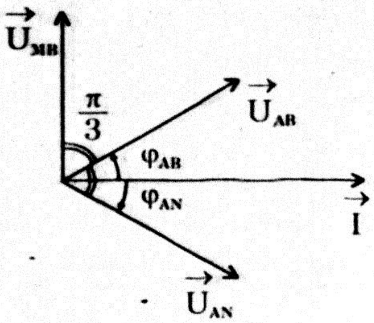
– Trước tiên ta vẽ trục dòng điện $(\vec{I})$.

– u_{MB} phải lệch pha với i góc $\frac{\pi}{2}$ và vì sớm pha hơn u_{AB} nên ta v

$\vec{U}_{MB} \perp \vec{I}$ sao cho $(\vec{I}, \vec{U}_{MB}) = +\frac{\pi}{2}$.

– Vẽ $\vec{U}_{AB}$ sao cho $(\vec{U}_{AB}, \vec{U}_{MB}) = +\frac{\pi}{3}$

– Vẽ $\vec{U}_{AN}$ sao cho $(\vec{U}_{AB}, \vec{U}_{AN}) = -\frac{\pi}{3}$



Từ giản đồ vừa vẽ ta suy ra : $\varphi_{AB} = \frac{\pi}{6}$ và $\varphi_{AN} = -\frac{\pi}{6}$

- $tg\varphi_{AN} = -\frac{Z_C}{R}$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{Z_C}{R} \Rightarrow R = \sqrt{3}.Z_C$$

- $tg\varphi_{AB} = \frac{Z_L - Z_C}{R}$ với $Z_L = L\omega = 300\ (\Omega)$

$$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{300 - Z_C}{\sqrt{3}.Z_C} \Rightarrow Z_C = 150\ (\Omega)$$

$$C = \frac{10^{-3}}{15\pi}\ (F)$$

và $R = 150\sqrt{3}\ (\Omega)$.

2. *Giá trị L và số chỉ cực đại của ampe kế :*

$$Z_L = Z_C = 150\Omega$$

$$L = \frac{1,5}{\pi}H$$

$$I_{max} = \frac{U}{R} \text{ (cộng hưởng điện)}$$

$$= \frac{120}{150\sqrt{3}} = 0,46\ (A).$$

3. *Giá trị R_0 – L và số chỉ ampe kế :*

Số chỉ vôn kế : $U_V = I.Z_L = \frac{U}{\sqrt{R'^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \times Z_L$

với : $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \Rightarrow R_0 = \frac{RR'}{R - R'}$ (**)

$$= U\sqrt{\frac{Z_L^2}{R'^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = U\sqrt{y}$$

U_V : Max ↔ y : Max ↔ $y' = 0$.

Đặt : $u = Z_L^2 \rightarrow u' = 2Z_L$

$V = R'^2 + (Z_L - Z_C)^2 \rightarrow V' = 2(Z_L - Z_C)$

thì : $y = \frac{u}{V} \rightarrow y' = \frac{u'V - uV'}{V^2} = 0 \Rightarrow u'V - uV' = 0$

$$2Z_L[R'^2 + (Z_L - Z_C)^2] - Z_L^2.2(Z_L - Z_C) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (Z_C^2 - Z_L Z_C + R'^2) \times 2Z_L = 0$$

$$\Rightarrow \quad Z_C^2 - Z_L Z_C + R'^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad Z_L = \frac{Z_C^2 + R'^2}{Z_C} = Z_C + \frac{R'^2}{Z_C} \quad \Rightarrow \quad Z_L - Z_C = \frac{R'^2}{Z_C}$$

Thay các giá trị Z_L và $Z_L - Z_C$ vừa tính vào (*), ta được :

$$U_{V(max)} = \frac{Y}{\sqrt{R'^2 + \left(\frac{R'^2}{Z_C}\right)^2}} \times \left(Z_C + \frac{R'^2}{Z_C}\right) = \frac{U}{\sqrt{R'^2 \frac{Z_C^2 + R'^2}{Z_C^2}}} \times \frac{Z_C^2 + R'^2}{Z_C}$$

$$= \frac{U}{R'}\sqrt{Z_C^2 + R'^2}$$

Thay số : $240 = \dfrac{120}{R'}\sqrt{150^2 + R'^2}$

$$4R'^2 = 150^2 + R'^2 \quad \Rightarrow \quad R' = \frac{150}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}\ (\Omega)$$

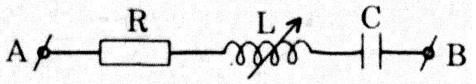
$$(^{**}) \quad \Rightarrow \quad R_0 = \frac{150\sqrt{3}.50\sqrt{3}}{150\sqrt{3} - 50\sqrt{3}} = 75\sqrt{3}\ (\Omega)$$

Lúc đó : $Z_L = Z_C + \dfrac{R'^2}{Z_C} = 150 + \dfrac{(50\sqrt{3})^2}{150} = 200\ (\Omega)$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{200}{100\pi} = \frac{2}{\pi}\ (H)$$

Số chỉ ampe kế : $I = \dfrac{U_{V(max)}}{Z_L} = \dfrac{240}{200} = 1{,}2\ (A).$

6.41 Cho một đoạn mạch điện xoay chiều gồm một điện trở thuần $R = 100\Omega$, một tụ điện có điện dung $C = \dfrac{10^{-4}}{\pi}$ (F) và một cuộn dây có điện trở không đáng kể, có độ tự cảm thay đổi được, nối tiếp với nhau như hình vẽ. Hiệu điện thế tức thời giữa hai đầu đoạn mạch là :



$$u_{AB} = 200\sin 100\pi t\ (V).$$

a) Tính L để hệ số công suất đoạn mạch là lớn nhất. Tính công suất tiê thụ trong đoạn mạch lúc đó.

b) Cho công suất tiêu thụ trong đoạn mạch $P = 100W$. Hãy tính giá trị tương ứng của L và viết biểu thức của cường độ dòng điện tức thời qua đoạn mạch.

c) Khi cho L có giá trị tăng dần từ 0 thì công suất tiêu thụ P của mạch sẽ thay đổi thế nào ?

(ĐH THỦY SẢN – 98)

Giải

a) *Giá trị L để hệ số công suất lớn nhất*

- $$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

$$\cos\varphi : \text{Max} \quad \rightarrow \quad Z_L = Z_C$$

với : $$Z_C = \frac{1}{C.\omega} = \frac{1}{\frac{10^{-4}}{\pi}.100\pi} = 100\ (\Omega)$$

nên : $$Z_L = 100\ (\Omega) \quad \rightarrow \quad L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{100}{100\pi} = \frac{1}{\pi}\ (H)$$

- Vì $Z_L = Z_C$: có cộng hưởng điện nên :

$$I_{max} = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{\sqrt{2}.R} = \frac{200}{\sqrt{2}.100} = \sqrt{2}\ (A)$$

$$P_{(max)} = I^2_{max}.R = (\sqrt{2})^2 \times 100 = 200\ (W).$$

b) *Giá trị L và biểu thức i khi P = 100W*

- $$P = I^2.R$$

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{100}{100}} = 1\ (A)$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{\sqrt{2}.I} = \frac{200}{\sqrt{2}.1} = 100\sqrt{2}\ (\Omega) = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

$$\Rightarrow \quad (Z_L - Z_C)^2 = Z^2 - R^2$$

$$Z_L - Z_C = \pm\sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$Z_L = Z_C \pm \sqrt{Z^2 - R^2} = 100 \pm \sqrt{(100\sqrt{2})^2 - 100^2} = \left[\begin{array}{l} 0 \\ 200\ (\Omega) \end{array}\right.$$

Với $$Z_L = 0 \quad \rightarrow \quad L = 0$$

$$Z_L = 200 \rightarrow \quad L = \frac{2}{\pi}\ (H).$$

- Biểu thức $i = I_0\sin(100\pi t - \varphi)$

với $I_0 = I\sqrt{2} = \sqrt{2}$ (A)

$$\text{tg}\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \begin{cases} \dfrac{0 - 100}{100} = -1 \rightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{200 - 100}{100} = 1 \rightarrow \varphi = +\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy} \begin{cases} i = \sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right) \text{(A)} \quad \text{nếu } L = 0 \\ i = \sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{4}\right) \text{(A)} \quad \text{nếu } L = \dfrac{2}{\pi}\text{H.} \end{cases}$$

c) *Sự thay đổi công suất P khi L tăng từ 0 :*

$$P = I^2.R = \frac{U^2}{R^2(Z_L - Z_C)^2}.R$$

Trong đó U, R, Z_C không đổi, còn $Z_L = x$ thay đổi.

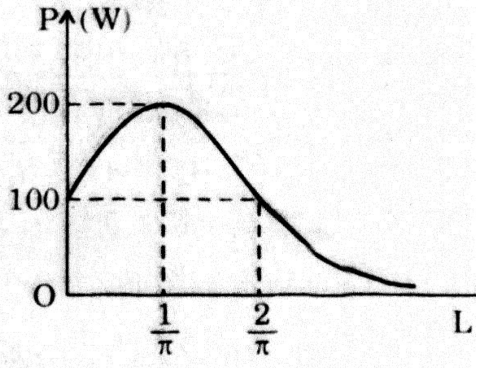
$$P = \frac{U^2R}{R^2 + (x - Z_C)^2}$$

Lấy đạo hàm của P theo x : $P' = -2U^2R\dfrac{x - Z_C}{[R^2 + (x - Z_C)^2]^2}$

- $P' = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = Z_L = Z_C = 100\Omega \quad \rightarrow \quad L = \dfrac{1}{\pi}$H
- $P' > 0 \quad \leftrightarrow \quad x - Z_C < 0 \; ; Z_L < 100\Omega \quad \rightarrow \quad L < \dfrac{1}{\pi}$H
- $P' < 0 \quad \leftrightarrow \quad L > \dfrac{1}{\pi}$H.

Ta có bảng biến thiên sau đây :

L	0		1/π		∞
P'		+	0	–	
P	100	↗	200	↘	0



Qua bảng biến thiên và đồ thị của P theo L ta thấy rất rõ :

+ L tăng từ 0 → $\dfrac{1}{\pi}$H thì công suất tăng từ 100 → 200W

+ L = $\dfrac{1}{\pi}$H : công suất đạt cực đại (= 200W)

+ L tăng từ $\dfrac{1}{\pi}$H → ∞ thì công suất tiếp tục giảm đến 0.

Chương VII

ĐOẠN MẠCH XOAY CHIỀU MẮC SONG SONG

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

- Tìm các biểu thức cường độ qua các nhánh :

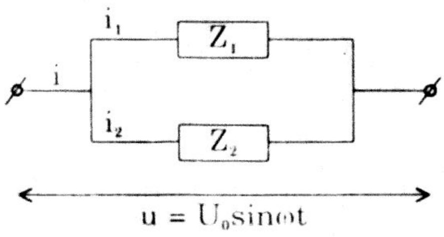
$$i_1 = I_{01}\sin(\omega t - \varphi_1)$$

$$i_2 = I_{02}\sin(\omega t - \varphi_2)$$

- Vẽ giản đồ vectơ của i

$$i = i_1 + i_2 \quad \text{(với trục gốc là vectơ } \vec{U}_0\text{)}$$

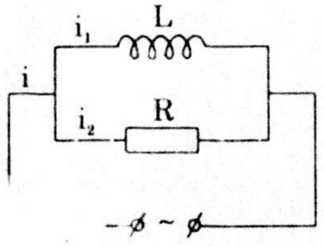
- Dựa trên giản đồ để tìm biên độ I_0 và độ lệch pha giữa u và i.



BÀI TẬP CƠ BẢN

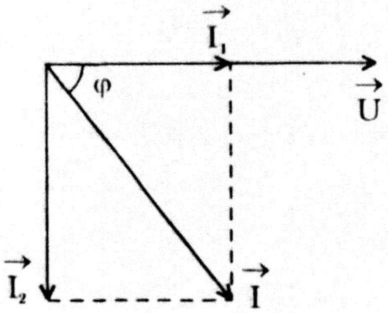
Ví dụ 1 : Cho cuộn dây thuần cảm với $L = \dfrac{3}{20\pi}$ H và điện trở thuần $R = 20\Omega$ mắc song song vào nguồn xoay chiều $u = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V). Tính cường độ hiệu dụng I và biểu thức cường độ dòng điện qua mạch chính. Biết $\text{tg}53^0 \approx \dfrac{4}{3}$.

Giải



i_1 có $\begin{cases} \bullet \quad I_1 = \dfrac{U}{Z_L} = \dfrac{120}{15} = 8\,(A) \\ \bullet \quad \text{Trễ pha hơn u góc } \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

i_2 có $\begin{cases} \bullet \quad I_2 = \dfrac{U}{R} = \dfrac{120}{60} = 6\,(A) \\ \bullet \quad \text{Cùng pha với u} \end{cases}$



Do $\quad i = i_1 + i_2$

$$\begin{matrix} i & = & i_1 & + & i_2 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{I} & = & \vec{I}_1 & + & \vec{I}_2 \end{matrix}$$

Lấy $\vec{U}$ làm gốc ta vẽ được giản đồ vectơ.

Trên giản đồ ta tính được : $\quad I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 10\ (A)$

và cường độ dòng điện i trễ pha hơn hiệu điện thế u góc φ nên :

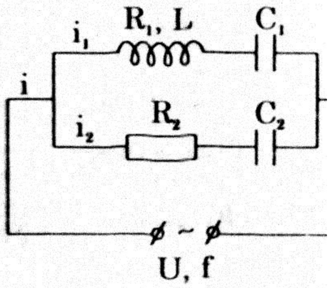
$$\text{tg}\varphi = \frac{I_1}{I_2} = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad \varphi = 53^0 = \frac{53\pi}{180}\ (\text{rad})$$

Vậy : $i = 10\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{53\pi}{180}\right)$ **(A)**.

Ví dụ 2 : Cho đoạn mạch gồm 2 **nhánh** mắc song song : Nhánh t nhất gồm cuộn dây có $R_1 = 132\Omega$, $L = \frac{6}{25\pi}$ H ghép nối tiếp với $C_1 = \frac{50}{\pi}\mu$F. Nhánh thứ hai gồm **điện trở** thuần $R_2 = 100\Omega$ ghép tiếp với tụ $C_2 = \frac{10^{-4}}{\pi}$ F. Hai đầu **đoạn mạch** mắc vào nguồn xoay chi tần số f = 50Hz, hiệu điện thế **hiệu dụng** U = 220V. Tính cường hiệu dụng qua mạch chính.

Giải

+ Nhánh thứ nhất có : $Z_L = L\omega = 24\ (\Omega)$



$$Z_{C_1} = \frac{1}{C_1\omega} = 200\ (\Omega)$$

$$\text{tg}\varphi_1 = \frac{Z_L - Z_{C_1}}{R_1} = \frac{4}{3} \quad (\varphi_1 > 0)$$

Vậy : i_1 có
- $I_1 = \frac{U}{Z_1} = 1$ (A)
- Trễ pha hơn u **góc φ_1 mà** $\text{tg}\varphi_1 = \frac{4}{3}$

+ Nhánh thứ hai có : $Z_{C_2} = \frac{1}{C_2\omega} = 100\ (\Omega)$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + Z_{C_2}^2} = 100\sqrt{2}\ (\Omega)$$

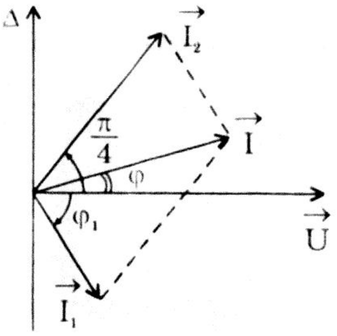
$$\text{tg}\varphi_2 = \frac{-Z_{C_2}}{R_2} = -1 \quad \rightarrow \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{4} < 0$$

Vậy : i_2 có
- $I_2 = \frac{U}{Z_2} = 1{,}55$ (A)
- Sớm pha hơn u góc $\frac{\pi}{4}$

+ Do

$$\begin{matrix} i & = & i_1 & + & i_2 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{I} & = & \vec{I}_1 & + & \vec{I}_2 \end{matrix} \qquad (*)$$

Lấy $\vec{U}$ làm gốc ta vẽ được giản đồ



- Chiếu các vectơ của (*) xuống trục $\Delta \perp \vec{U}$

$$I\sin\varphi = I_2\sin\frac{\pi}{4} - I_1\sin\varphi_1$$

với $\quad \sin\varphi_1 = \dfrac{tg\varphi_1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi_1}} = \dfrac{4}{5}$

nên $\quad I\sin\varphi = 1{,}554.\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1\dfrac{4}{5} = 0{,}3 \qquad (1)$

- Chiếu xuống $\vec{U}$: $\quad I\cos\varphi = I_2\cos\dfrac{\pi}{4} + I_1\cos\varphi_1$

với $\quad \cos\varphi_1 = \sqrt{1 - \sin^2\varphi_1} = \dfrac{3}{5}$

nên $\quad I\cos\varphi = 1{,}554.\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 1\dfrac{3}{5} = 1{,}7 \qquad (2)$

Bình phương 2 phương trình (1) và (2) rồi cộng vế với vế ta được :

$$I^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 0{,}3^2 + 1{,}7^2 \quad \Rightarrow \quad I \approx 1{,}73\ (A).$$

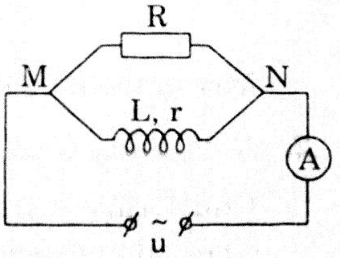
ĐỀ THI

7.1 Cho mạch điện như hình vẽ : $u = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V).

Điện trở $R = 60\Omega$, cuộn dây có hệ số tự cảm L và điện trở thuần r. Bỏ qua điện trở ampe kế và của dây dẫn.

Dòng điện qua cuộn dây có biểu thức :

$$i = 2\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\ (A).$$



1. Tính L, r và tìm số chỉ ampe kế A.

2. Thay điện trở R bằng tụ C thì cường độ mạch chính đồng pha với hiệu điện thế ở hai đầu đoạn mạch MN. Tính điện dung C và số chỉ của ampe kế A.

(ĐHQG – TP.HCM – 96)

Giải

1. *Giá trị L, r và số chỉ ampe kế :*

- $Z_d = \dfrac{U}{T_d} = \dfrac{120}{2} = 60\ (\Omega) \quad$ hay $\quad \sqrt{r^2 + Z_L^2} = 60 \qquad (1)$

Hiệu điện thế giữa hai đầu cuộn dây nhanh pha hơn dòng điện qu cuộn dây góc $\frac{\pi}{3}$ nên :

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{Z_L}{r} \qquad \Rightarrow \qquad Z_L = \sqrt{3}\,.r$$

nên (1) cho : $\sqrt{r^2 + (3r)^2} = 60 \Rightarrow \quad r = 30\ (\Omega)$

và $\quad Z_L = \sqrt{3}\,.30$

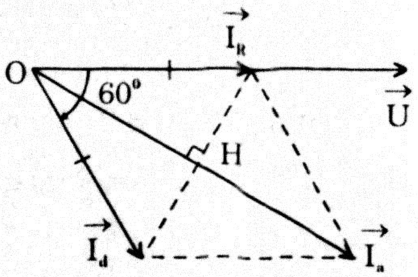
$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{30\sqrt{3}}{100\pi} \approx 0{,}165\ (H)$$

- Có $\quad \begin{array}{ccccc} i_a & = & i_R & + & i_d \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{I}_a & = & \vec{I}_R & + & \vec{I}_d \end{array}$

Ta vẽ được giản đồ vectơ, trong đó :

$\vec{I}_R$ có $\begin{cases} \bullet\quad I_R = \dfrac{U}{R} = \dfrac{120}{60} = 2\ (A) \\ \bullet\quad \vec{I}_R \text{ cùng giá với } \vec{U} \end{cases}$

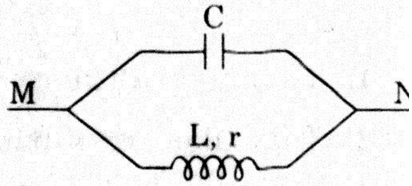
$\vec{I}_d$ có $\begin{cases} \bullet\quad I_d = 2\ (A) \\ \bullet\quad \text{Hợp với } \vec{U} \text{ góc} \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$



Dựa trên giản đồ ta có : $\quad I_a = 2.OH = 2\left(\dfrac{I_R\sqrt{3}}{2}\right) = I_R\sqrt{3}$

Vậy ampe kế chỉ : $\quad I_a = 2\sqrt{3} \approx 3{,}464\ (A).$

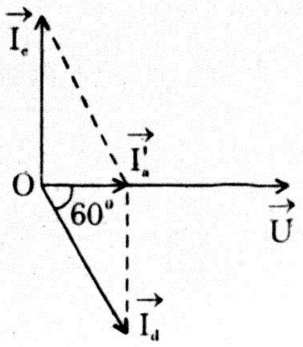
2. ***Điện dung C và số chỉ ampe kế :***



Chú ý rằng cuộn dây không đổi nên cường độ qua cuộn dây vẫn là :

$$i_d = 2\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\ (A)$$

Có : $\quad \begin{array}{ccccc} i'_a & = & i_R & + & i_d \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{I'}_a & = & \vec{I}_R & + & \vec{I}_d \end{array}$



Ta vẽ được giản đồ vectơ, trong đó :

+ $\vec{I}_d$ vẫn như cũ.

+ $\vec{I}_c$ hợp với $\vec{U}$ góc $\frac{\pi}{2}$ sao cho $\vec{I'}_a$ cùng giá với $\vec{U}$ (vì i_a cùng pha với u).

Từ giản đồ ta có : $\sin 60^0 = \frac{I_c}{I_d}$

$$\Rightarrow \quad I_c = i_d.\sin 60^0 = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ (A).$$

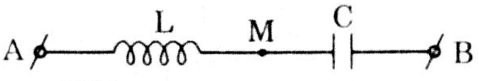
Dung kháng : $Z_C = \frac{U}{I_c} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}\ (\Omega)$

$$C = \frac{1}{Z_C.\omega} = \frac{1}{40\sqrt{3}.100\pi} = \frac{10^{-3}}{4\sqrt{3}\pi}\ (F) \approx 46\ (\mu F)$$

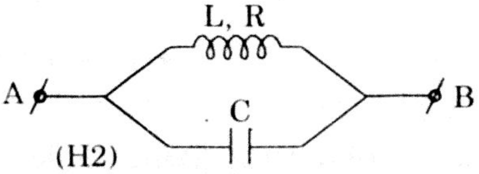
và $I'_a = I_d.\cos 60^0 = I_d.\frac{1}{2} = 2.\frac{1}{2} = 1\ (A).$

7.2 Cho cuộn cảm có độ tự cảm L và tụ điện có điện dung C.

1. Cuộn cảm và tụ điện mắc như hình 1. Khi áp vào hai đầu đoạn mạch AB một hiệu điện thế xoay chiều $u_{AB} = U_0\sin 100\pi t$ thì hiệu điện thế hiệu dụng $U_{AM} = U_{MB} = U_{AB}$. Hãy chứng tỏ cuộn cảm có điện trở R đáng kể và tìm độ lệch pha của dòng điện so với u_{AM} và u_{AB}.



(H1)



(H2)

2. Cuộn cảm và tụ điện mắc như hình 2.

Cho biết $L = \frac{1}{\pi}$ H và $u_{AB} = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V). Hãy viết biểu thức của dòng điện qua cuộn cảm, qua tụ điện và qua mạch chính.

(ĐHQG – TP.HCM – ĐỢT 2 – 98)

Giải

1. *Cuộn cảm và C mắc nối tiếp :*

Ta có : $u_{AB} = u_{AM} + u_{MB}$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$\vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MB}$$

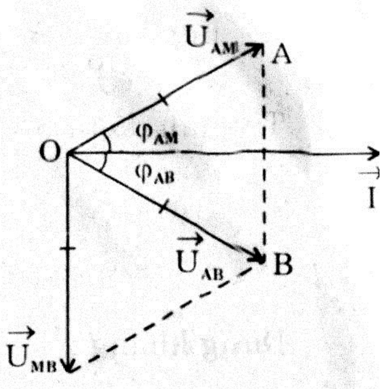
- Nếu cuộn cảm không có điện trở R thì u_{AM} và u_{MB} ngược pha tức 2 vectơ $\vec{U}_{AM}$ và $\vec{U}_{MB}$ cùng phương nhưng trái chiều nên :

$$U_{AB} = |U_{AM} - U_{MB}|$$

$\Rightarrow$ $U_{AB} < U_{AM}$ hoặc $U_{AB} < U_{MB}$: trái giả thiết.

Vậy : cuộn cảm phải có điện trở R.

- Giản đồ vectơ :



Do $U_{AM} = U_{MB} = U_{AB}$ nên ΔOAB đều.

$\Rightarrow \quad \widehat{OAB} = 60^0$

$\Rightarrow \quad \varphi_{AM} = 30^0$ và $\varphi_{AB} = 30^0$

Vậy : u_{AM} sớm pha hơn i góc 30^0

u_{AB} trễ pha hơn i góc 30^0.

2. ***Cuộn cảm và tụ mắc song song :***

Đầu tiên ta tính R và Z_C.

Ở câu 1 : $\quad tg\varphi_{AM} = \dfrac{Z_L}{R}$

$$R = \frac{Z_L}{tg\varphi_{AM}} = \frac{100}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 100\sqrt{3} \ (\Omega)$$

và : $\quad tg\varphi_{AB} = \dfrac{Z_L - Z_C}{R}$

$$\Rightarrow \quad Z_C = Z_L - Rtg\varphi_{AB} = 100 - 100\sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 200 \ (\Omega)$$

Biểu thức cường độ dòng điện qua cuộn cảm :

$$i_1 = L_{01}\sin(100\pi\, t - \varphi_1)$$

với $\quad I_{01} = \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}} = \dfrac{100\sqrt{2}}{(100\sqrt{3})^2 + 100^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (A)

$$tg\varphi_1 = \frac{Z_L}{R} = \frac{100}{100\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$$

Vậy : $i_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{6}\right)$ (A).

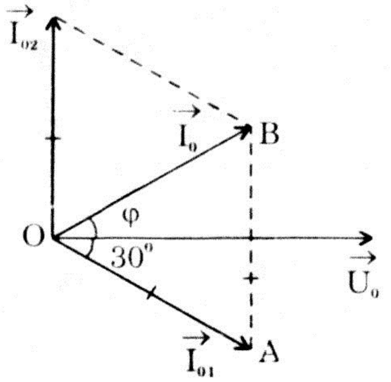
Biểu thức cường độ qua tụ điện : $i_2 = I_{02}\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

với $\quad I_{02} = \dfrac{U_0}{Z_C} = \dfrac{100\sqrt{2}}{200} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (A)

Vậy : $i_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (A).

Cường độ dòng điện qua mạch chính :

$$\begin{array}{ccccc} i & = & i_1 & + & i_2 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{I}_0 & = & \vec{I}_{01} & + & \vec{I}_{02} \end{array}$$



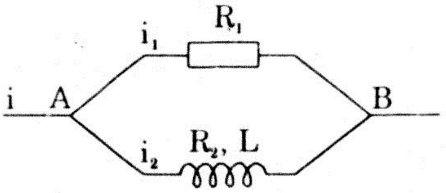
ΔOAB cân và có $\widehat{A} = 60^0$ nên là tam giác đều, do đó :

$$I_0 = I_{01} = I_{02} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (A)}$$

và $\varphi = 30^0$

Vậy : $i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(100t + \frac{\pi}{6}\right)$ (A).

7.3 Giữa hai đầu A, B của một đoạn mạch xoay chiều tần số f = 50Hz, người ta mắc song song một điện trở $R_1 = 200\Omega$ và một cuộn dây có điện trở R_2, hệ số tự cảm L như hình vẽ.



Cường độ hiệu dụng I_1, I_2 trong hai nhánh bằng nhau và cường độ hiệu dụng trong mạch chính là $I = I_1\sqrt{3}$.

a) Tính độ lệch pha của cường độ dòng điện i trong mạch chính đối với hiệu điện thế giữa hai đầu A, B.

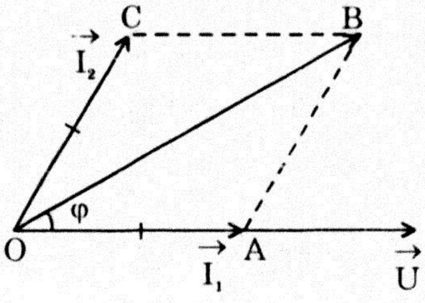
b) Tính gia trị R_2 và L.

(ĐHQG – TP.HCM – ĐỢT 3 – 97)

Giải

a) *Độ lệch pha của cường độ dòng điện đối với hiệu điện thế :*

Có giản đồ vectơ :



ΔOAB cho :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA>OB.\cos\varphi$$

$$I_1^2 = I_1^2 + (I_1\sqrt{3})^2 - 2I_1.(I_1\sqrt{3})\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 30^0.$$

Vậy : Cường độ dòng điện i và hiệu điên thế u_{AB} lệch pha góc 30^0.

b) *Giá trị R_2 và L :*

OABC là hình thoi nên : $\widehat{AOC} = 2\widehat{AOB} = 60^0$.

$\widehat{AOC}$ chính là độ lệch pha giữa i_2 và u_{AB}.

Mặt khác : $I_2 = I_1$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{R_2^2 + Z_L^2} = R_1 = 200\ (\Omega) \qquad (*)$$

Hệ số công suất của cuộn dây : $\cos\varphi_1 = \dfrac{R^2}{\sqrt{R_2^2 + Z_L^2}}$

$$\Rightarrow \quad R_2 = \cos\varphi_1 . \sqrt{R_2^2 + Z_L^2} = \cos 60^0 .100 = 100\ (\Omega)$$

$$(*) \rightarrow \quad Z_L^2 = R_1^2 - R_2^2 = 200^2 - 100^2 = 3.100^2$$

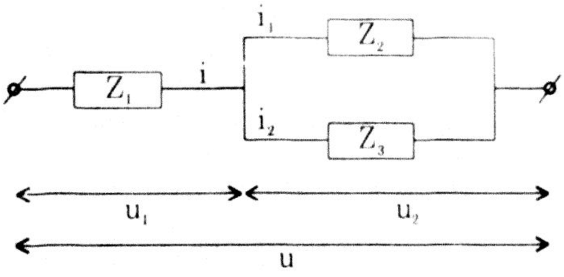
$$Z_L = 100\sqrt{3}\ (\Omega)$$

$$L = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \approx 0{,}55\ (H).$$

Chương VIII

MẠCH ĐIỆN XOAY CHIỀU MẮC HỖN HỢP

TÓM TẮT LÍ THUYẾT



1. Tìm u_1 :
- $U_1 = IZ_1$
- Lệch pha với i góc φ_1 mà $tg\varphi_1 = \dfrac{Z_{L_1} - Z_{C_1}}{R_1}$

2. Tìm u_2 :

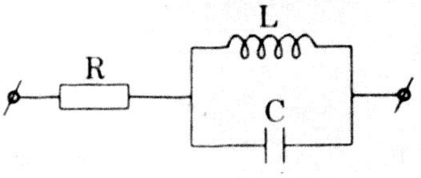
+ Tìm i_1 :
  - $I_1 = \dfrac{U_2}{Z_2}$
  - Lệch pha với u_2 góc α_1 mà $tg\alpha_1 = \dfrac{Z_{L_2} - Z_{C_2}}{R_2}$
+ Tìm i_2 :
  - $I_2 = \dfrac{U_2}{Z_3}$
  - Lệch pha với u_2 góc α_2 mà $tg\alpha_2 = \dfrac{Z_{L_3} - Z_{C_3}}{R_3}$
+ Vẽ giản đồ vectơ của $i = i_1 + I_2$.
+ Từ giản đồ tìm được u_2.

3. Tìm u :

+ Vẽ giản đồ vectơ của $u = u_1 + u_2$.
+ Từ giản đồ suy ra biểu thức u.

BÀI TẬP CƠ BẢN

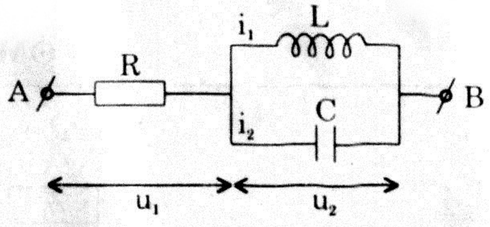
Ví dụ : Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ, trong đó $R = 3\Omega$, cuộn cảm chỉ có $L = \dfrac{12}{\pi}.10^{-2}$ H và tụ $C = \dfrac{1}{3\pi}.10^{-2}$ F.



Biểu thức cường độ dòng điện trong mạch chính là $i = 5\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (A).

Viết biểu thức hiệu điện thế u_{AB}.

Giải

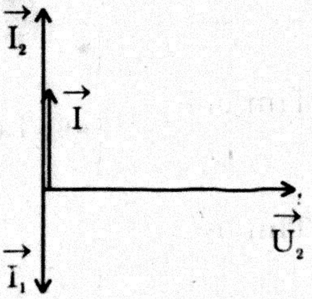


1. u_1 có $\begin{cases} \bullet\ U_1 = IR = 15\text{(V)} \\ \bullet\ \text{Cùng pha với i} \end{cases}$

2. Tìm u_2 :

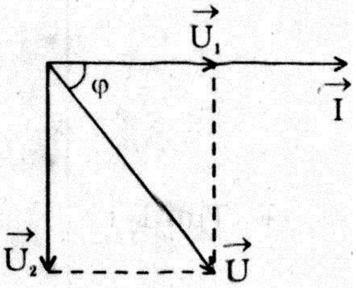
$$+\ i_1 \text{ có } \begin{cases} \bullet\ I_1 = \dfrac{U_2}{Z_L} = \dfrac{U_2}{12} \\ \bullet\ \text{Trễ pha hơn } u_2 \text{ góc } \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$+\ i_2 \text{ có } \begin{cases} \bullet\ I_2 = \dfrac{U_2}{Z_C} = \dfrac{U_2}{3} \\ \bullet\ \text{Sớm pha hơn } u_2 \text{ góc } \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$+\ \text{Do} \quad \begin{array}{ccccc} i & = & i_1 & + & i_2 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{I} & = & \vec{I}_1 & + & \vec{I}_2 \end{array}$$

Lấy $\vec{U_2}$ làm gốc vẽ được giản đồ vectơ.



Dựa trên giản đồ ta có :

$$I = I_2 - I_1 = \frac{U_2}{4} \quad \Rightarrow \quad U_2 = 4I = 20\ \text{(V)}$$

và u_2 trễ pha hơn i góc $\dfrac{\pi}{2}$.

3. Tìm u :

$$\text{Do} \quad \begin{array}{ccccc} u & = & u_1 & + & u_2 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{U}_0 & = & \vec{U}_1 & + & \vec{U}_2 \end{array}$$

Lấy $\vec{I}$ là gốc vẽ giản đồ vectơ. Dựa trên giản đồ ta tìm được :

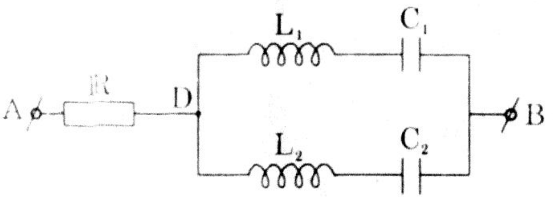
$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = 25\ \text{(V)}$$

và u trễ pha hơn i góc φ mà $\text{tg}\varphi = \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{4}{3}$.

Vậy : $u = 25\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \text{arctg}\dfrac{4}{3}\right)$ (V).

ĐỀ THI

8.1 Cho mạch điện như hình vẽ với



$R = 15\Omega$; $L_1 = \dfrac{0,1}{\pi}H$;

$C_1 = 530\mu F$; $L_2 = \dfrac{0,2}{\pi}H$;

$C_2 = 106\mu F$.

Giữa hai đầu A, B duy trì một hiệu thế $u = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V).

Tính cường độ hiệu dụng qua R và U_{DB}.

(ĐHQG TP.HCM - 96)

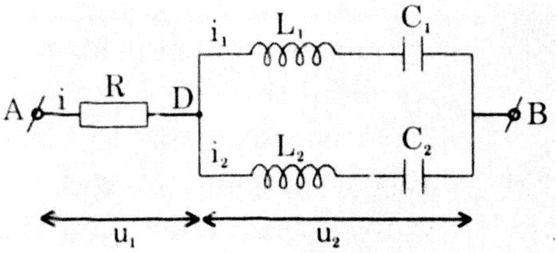
Giải

$$Z_{L_1} = L_1\omega = \frac{0,1}{\pi}.100\pi = 10\ (\Omega)$$

$$Z_{C_1} = \frac{1}{C_1.\omega} = \frac{1}{530.10^{-6}.100\pi} = 6\ (\Omega)$$

$$Z_{L_2} = L_2\omega = \frac{0,2}{\pi}.100\pi = 20\ (\Omega)$$

$$Z_{C_2} = \frac{1}{C_2\omega} = \frac{1}{106.10^{-6}.100\pi} = 30\ (\Omega)$$



a) u_1 có $\begin{cases} \bullet\ U_1 = IR = 15I \\ \bullet\ \text{Cùng pha với i} \end{cases}$

b) Tìm u_2 :

+ i_1 có $\begin{cases} \bullet\ I_1 = \dfrac{U_2}{|Z_{L_1} - Z_{C_1}|} = \dfrac{U^2}{4} \\ \bullet\ Z_{L_1} > Z_{C_1} \text{ nên } i_1 \text{ trễ pha hơn } u_2 \text{ góc } \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

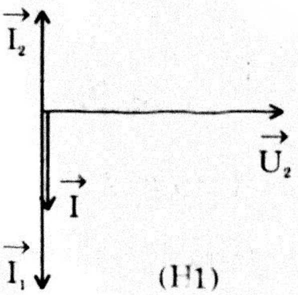
+ i_2 có $\begin{cases} \bullet\ I_2 = \dfrac{U_2}{|Z_{L_2} - Z_{C_2}|} = \dfrac{U_2}{10} \\ \bullet\ Z_{L_2} > Z_{C_2} \text{ nên } i_2 \text{ sớm pha hơn } u_2 \text{ góc } \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

+ Có $\begin{matrix} i & = & i_1 & + & i_2 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{I} & = & \vec{I}_1 & + & \vec{I}_2 \end{matrix}$

Ta vẽ được giản đồ vectơ (H1). Dựa trên giản đồ, ta có :

$$I = I_1 - I_2 = \frac{U_2}{4} - \frac{U_2}{10} = \frac{1,5U_2}{10} \quad \Rightarrow \quad U_2 = \frac{10}{1,5}I$$

Vậy : $u_2 \begin{cases} \bullet \quad U_2 = \dfrac{10}{1,5}I \\ \bullet \quad u_2 \text{ sớm pha hơn i góc } \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

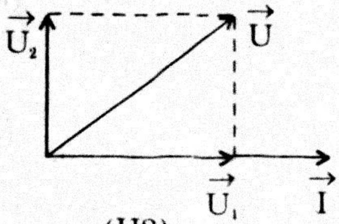


c) Có : $u = u_1 + u_2$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$\vec{U} = \vec{U_1} + \vec{U_2}$$

Ta vẽ được giản đồ vectơ như (H2).



(H2) cho : $U^2 = U_1^2 + U_2^2$

$$= \left[15^2 + \left(\frac{10}{1,5}\right)^2\right] I = \frac{606,25}{2,25} I^2$$

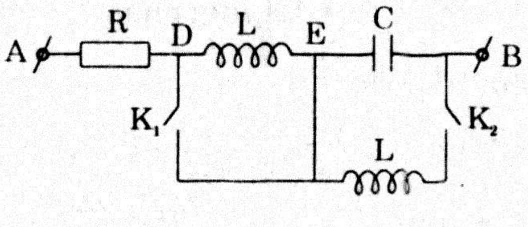
$$\Rightarrow \quad I^2 = \frac{2,25U^2}{606,25} = \frac{2,25 \times 100^2}{606,25}$$

$$I \approx 6,1 \text{ (A)}$$

và $\quad U_{DB} = U_2 = \dfrac{10}{1,5} \times 6,1 = 40,67$ (V).

8.2 Cho mạch điện như hình vẽ. Bỏ qua điện trở các cuộn dây, dây nối và các khóa K_1, K_2. Hai cuộn dây có cùng độ tự cảm L. Điện trở R = 200Ω. Hiệu điện thế giữa A và B ổn định, có biểu thức

$$u = 400\sqrt{2}\sin(100\pi t) \text{ (V)}.$$



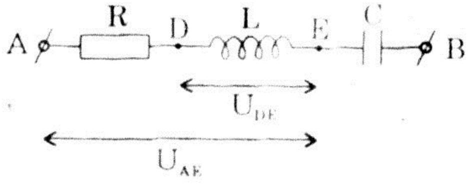
1. Khi K_1 và K_2 cùng mở, hiệu điện thế giữa D và E nhanh pha hơn u góc $\dfrac{2\pi}{3}$ và hiệu điện thế giữa A và E nhanh pha hơn u góc $\dfrac{\pi}{3}$. Tìm L và C.

2. K_1 và K_2 cùng đóng. Tìm cường độ hiệu dụng qua R.

(ĐHQG TP.HCM – 96)

Giải

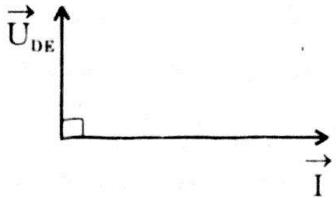
1. K_1 và K_2 cùng mở. Tìm L và C :


A
R
D
L
E
C
B
U_{DE}
U_{AE}

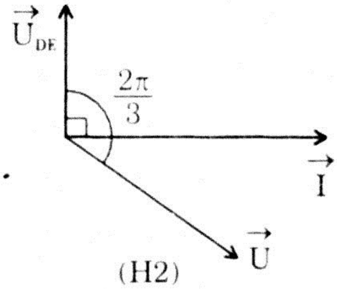
Vì u_{DE} sớm pha hơn i góc $\frac{\pi}{2}$ nên ta vẽ được giản đồ (1).

Vì u_{DE} sớm pha hơn u góc $\frac{2\pi}{3}$ nên ta vẽ được $\vec{U}$ ở giản đồ (2).

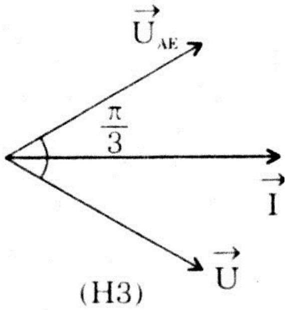
Vì U_{AE} sớm pha hơn u góc $\frac{\pi}{3}$ nên ta vẽ được $\vec{U}_{AE}$ hợp với $\vec{U}$ góc $\frac{\pi}{3}$ ở giản đồ (3).


$\vec{U}_{DE}$
$\vec{I}$

(H1)


$\vec{U}_{DE}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\vec{I}$
$\vec{U}$

(H2)


$\vec{U}_{AE}$
$\frac{\pi}{3}$
$\vec{I}$
$\vec{U}$

(H3)

- (H2) $\Rightarrow$ u trễ pha hơn i góc $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ nên :

$$\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{Z_L - Z_C}{R} \Rightarrow Z_L - Z_C = -\frac{R}{\sqrt{3}} \Rightarrow Z_C = Z_L + \frac{R}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

- (H3) $\Rightarrow$ u_{AE} sớm pha hơn i góc $\varphi_{AE} = \frac{\pi}{6}$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{Z_L}{R} \Rightarrow Z_L = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{200}{\sqrt{3}}\ (\Omega) \Rightarrow L = \frac{Z_L}{\omega} \approx 0{,}368\ (\text{H})$$

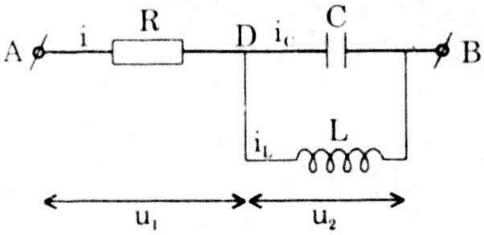
$$(1) \Rightarrow Z_C = \frac{200}{\sqrt{3}} + \frac{200}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}}\ (\Omega)$$

$$C = \frac{1}{Z_C . \omega} = 13{,}8\ (\mu\text{F}).$$

2. *K_1 và K_2 cùng đóng. Tính cường độ qua R :*

Dòng điện không qua L nên mạch điện được vẽ lại.

a) u_1 có $\begin{cases} \bullet\ U_1 = IR = 200I \\ \bullet\ u_1 \text{ cùng pha với i} \end{cases}$


A
i
R
D
i_C
C
B
i_L
L
u_1
u_2

b) Tìm u_2 :

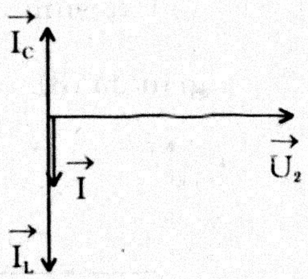
+ i_C có
- $I_C = \dfrac{U_2}{Z_C} = \dfrac{\sqrt{3}}{400}U_2$
- i_C sớm pha hơn u góc $\dfrac{\pi}{2}$

+ i_L có
- $I_L = \dfrac{U_2}{Z_L} = \dfrac{\sqrt{3}}{Z_L} = \dfrac{\sqrt{3}}{200}U_2 = 2I_C$
- i_L trễ pha hơn u_2 góc $\dfrac{\pi}{2}$

+ Có

$$\begin{aligned} i &= i_C + i_L \\ &\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ \vec{I} &= \vec{I}_C + \vec{I}_L \end{aligned}$$

Ta vẽ được giản đồ (H4).



(H.4)

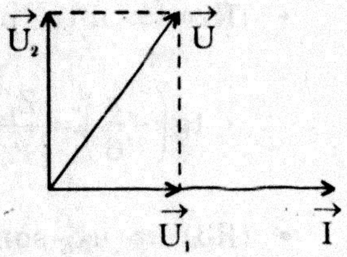
(H4) cho : $I = I_L - I_C = \dfrac{\sqrt{3}}{400}U_2$

Vậy u_2 có
- $U_2 = \dfrac{400}{\sqrt{3}}I$
- u_2 sớm pha hơn i góc $\dfrac{\pi}{2}$

c) Có :

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ \vec{U} &= \vec{U}_1 + \vec{U}_2 \end{aligned}$$

Ta vẽ được giản đồ (H5) và ta có :

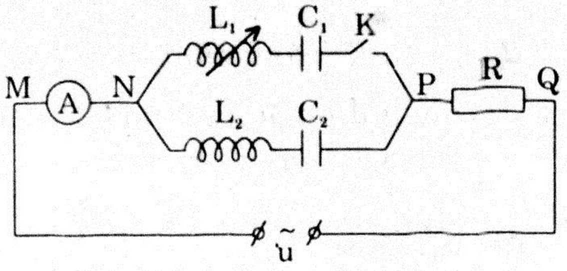


(H.5)

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 = (200I)^2 + \left(\frac{400}{\sqrt{3}}I\right)^2 = \frac{28}{3}(100I)^2$$

$$\Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{3}{28}}.\frac{U}{100} \quad \text{với } U = 400 \text{ (V) nên :} \quad I \approx 1,31 \text{ (A).}$$

8.3 Cho mạch điện như hình vẽ. Các cuộn dây thuần cảm kháng và có hệ số tự cảm $L_1 = \dfrac{1}{2\pi}$H, $L_2 = \dfrac{1}{\pi}$H, tụ $C_2 = \dfrac{2}{\pi}.10^{-4}$F. Bỏ qua điện trở của ampe kế, của khóa K và của dây dẫn.



1. Khi khóa K ngắt, công suất tiêu thụ của đoạn mạch cực đại. Tính điện trở R.

2. Đóng khóa K, ampe kế Ⓐ có số chỉ nhỏ nhất. Tính C_1 và viết biểu thức của dòng điện tức thời qua L_1, L_2.

3. Cho $C_1 = \dfrac{2}{3\pi}.10^{-4}$ F, đóng khóa K. Tìm số chỉ của ampe kế A.

(ĐHQG TP.HCM – ĐỢT 2 – 97)

Giải

1. *K ngắt, công suất cực đại – tìm R :*

Mạch điện gồm R, L_2 và C_2 mắc nối tiếp.

Công suất của mạch :

$$P = I^2.R = \frac{U^2}{R^2 + (Z_{L_2} - Z_{C_2})^2} \times R = \frac{U^2}{R + \dfrac{(Z_{L_2} - Z_{C_2})^2}{R}}$$

Để P : Max thì $R + \dfrac{(Z_{L_2} - Z_{C_2})^2}{R}$: Min

mà : $R \times \dfrac{(Z_{L_2} - Z_{C_2})^2}{R}$: không đổi nên : $R = \dfrac{(Z_{L_2} - Z_{C_2})^2}{R}$

$$\Rightarrow \quad R = |Z_{L_2} - Z_{C_2}|$$

với : $Z_{L_2} = L_2\omega = 100\ (\Omega)$; $Z_{C_2} = \dfrac{1}{C_2\omega} = 50\ (\Omega)$

Vậy : R = 50 (Ω).

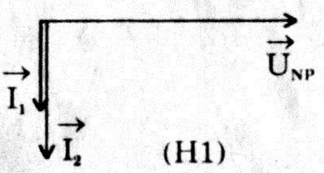
2. *K đóng,* Ⓐ *chỉ nhỏ nhất. Tính C_1 và i_1, i_2 :*

Cường độ dòng điện qua ampe kế Ⓐ : $\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2$

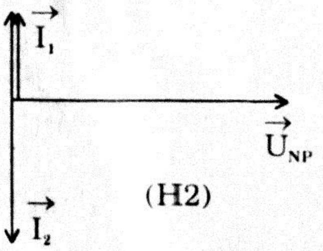
với i_1 có
- $I_1 = \dfrac{U_{NP}}{|Z_{L_1} - Z_{C_1}|} = \dfrac{U_{NP}}{|50 - Z_{C_1}|}$
- Lệch pha với u_{NP} góc $\dfrac{\pi}{2}$

i_2 có
- $I_2 = \dfrac{U_{NP}}{|Z_{L_2} - Z_{C_2}|} = \dfrac{U_{NP}}{50}$
- Trễ pha hơn u_{NP} góc $\dfrac{\pi}{2}$

Ta có được 2 giản đồ vectơ sau đây :



(H1)



(H2)

Với (H1) : $I = I_1 + I_2 \neq 0$

Với (H2) : $I = |I_1 - I_2|$ có thể bằng không.

Vậy để I có giá trị cực tiểu thì $I = 0$, tức $I_1 = I_2$.

$$\Rightarrow \quad |50 - Z_{C_1}| = 50 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 50 - Z_{C_1} = 50 & \Rightarrow \quad Z_{C_1} = 0 \\ 50 - Z_{C_1} = -50 & \Rightarrow \quad Z_{C_1} = 100\Omega \end{cases}$$

Để C_1 có một giá trị xác định thì $Z_{C_1} = 100\Omega$

với : $$C_1 = \frac{1}{Z_{C_1}.\omega} = \frac{1}{100.100\pi} = \frac{10^{-4}}{\pi}\ (F).$$

Lúc đó : $i_R = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{PQ} = 0$

Vậy : $u_{NP} = u_{MQ} = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V)

ta được : $I_1 = I_2 = \dfrac{U_{NP}}{50} = \dfrac{100}{50} = 2$ (A).

Cùng với (H.2) ta viết được :

$$i_1 = 2\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ (A)$$

$$i_2 = 2\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\ (A).$$

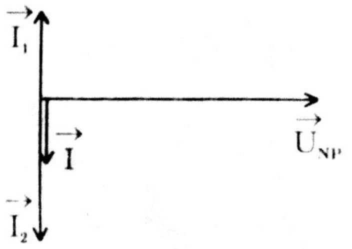
3. ***Đóng K : số chỉ của ampe kế :***

a) u_{PQ} có $\begin{cases} \bullet\ U_{PQ} = I.R = 50I \\ \bullet\ \text{Cùng pha với i} \end{cases}$

b) u_{NP} : $Z_{L_1C_1} = |Z_{L_1} - Z_{C_1}| = |50 - 150| = 100\Omega$

i_1 có $\begin{cases} \bullet\ I_1 = \dfrac{U_{NP}}{Z_{L_1C_1}} = \dfrac{U_{NP}}{100} \\ \bullet\ i_1 \text{ sớm pha hơn } u_{NP} \text{ góc } \dfrac{\pi}{2} \text{ (vì } Z_{C_1} > Z_{L_1}) \end{cases}$

i_2 có $\begin{cases} \bullet \quad I_2 = \dfrac{U_{NP}}{50} \\ \bullet \quad \text{Trễ pha hơn } u_{NP} \text{ góc } \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$



$\vec{I_1}$
$\vec{I}$
$\vec{U}_{NP}$
$\vec{I_2}$

Ta có giản đồ vectơ của $i = i_1 + i_2$

và từ đó suy ra :

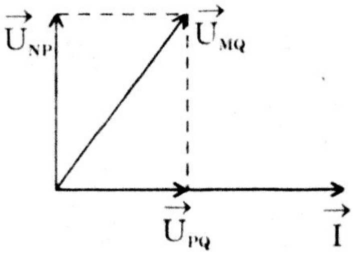
$$I = I_2 - I_1 = \frac{U_{NP}}{50} - \frac{U_{NP}}{100} = \frac{U_{NP}}{100}$$

$\Rightarrow \quad U_{NP} = 100I$

và u_{NP} sớm pha hơn i góc $\dfrac{\pi}{2}$.

c) Do $\quad u_{MQ} = u_{NP} + u_{PQ}$

Ta vẽ được giản đồ vectơ và từ đó ta có :



$\vec{U}_{NP}$
$\vec{U}_{MQ}$
$\vec{U}_{PQ}$
$\vec{I}$

$$u_{MQ} = \sqrt{U_{NP}^2 + U_{PQ}^2} = \sqrt{(100I)^2 + (50I)^2}$$

$$100 = 50.\sqrt{5}.I$$

$\Rightarrow \quad I = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}89$ (A).

Chương IX

DAO ĐỘNG ĐIỆN TỰ DO – SÓNG ĐIỆN TỪ

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Điện tích tụ điện – Cường độ dòng điện và hiệu điện thế giữa hai bản tụ*

$$q = q_0\sin(\omega t + \varphi)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega q_0\cos(\omega t + \varphi)$$

$$u = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C}\sin(\omega t + \varphi)$$

2. *Tần số góc – Tần số riêng và chu kì riêng*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

3. *Năng lượng trong mạch dao động*

- Năng lượng điện trường tức thời :

$$W_C = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

- Năng lượng từ trường tức thời :

$$W_L = \frac{1}{2}Li^2$$

- Năng lượng toàn phần của mạch dao động :

$$W = W_C + W_L = W_{C(max)} = W_{L(max)}$$

4. *Liên quan giữa mạch chọn sóng và sóng điện từ*

- Tần số của sóng điện từ có bước sóng λ :

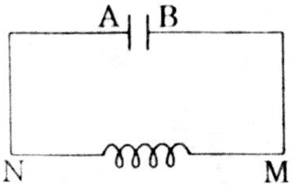
$$f = \frac{3.10^8}{\lambda}$$

- Mạch chọn sóng bắt được sóng điện từ có bước sóng λ :

$$f_0 = f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{3.10^8}{\lambda}$$

BÀI TẬP CƠ BẢN

Ví dụ 1 : Hiệu điện thế giữa hai bản (A, B) của một tụ điện có điện dung $C = 0{,}1\mu F$ là $U_{AB} = 120V$. Vào thời điểm $t = 0$ tụ điện mắc vào hai đầu (M, N) của một cuộn cảm có độ tự cảm $L = 1H$ và có điện trở không đáng kể. Lúc này cường độ dòng điện bằng 0.



1. Tính tần số góc, chu kì và tần số riêng của mạch dao động. Lấy $\pi^2 = 10$

2. Viết các biểu thức tính điện tích của tụ, hiệu thế của tụ cường độ dòng điện i trong mạch theo thời gian.

3. Tính hiệu thế giữa hai bản tụ lúc $t_1 = 1ms$.

Giải

1. *Tần số góc – chu kì và tần số riêng :*

- $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1.0{,}1.10^{-6}}} \approx 3160 \text{ (rad/s)}$$

- $$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{1.0{,}1.10^{-6}} \approx 2.10^{-3} \text{ (s)}$$

- $$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 504 \text{ (Hz)}.$$

2. *Biểu thức q(t) – u(t) – i(t) :*

- $q = q_0\sin(\omega t + \varphi)$

Để tìm q_0 và φ ta dựa vào điều kiện ban đầu :

Khi $t = 0$ thì $q = CU_{AB}$ và $i = q = 0$

$$\text{Lúc t} \begin{cases} q = q_0\sin(\omega t + \varphi) \\ i = q' = q_0\omega\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \xrightarrow{\text{lúc } t = 0} \begin{cases} CU_{AB} = q_0\sin\varphi & \textbf{(1)} \\ 0 = q_0\omega\cos\varphi & \textbf{(2)} \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow \quad \cos\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$(1) \rightarrow \quad \sin\varphi > 0, \quad \text{vậy : } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$(1) \rightarrow \quad q_0 = \frac{CU_{AB}}{\sin\varphi} = \frac{10^{-7}.120}{\sin\frac{\pi}{2}} 1{,}2.10^{-5} \text{ (C)}$$

$$\text{Vậy : } \quad q(t) = 1{,}2.10^{-5}\sin\left(3160t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (C)}.$$

- Biểu thức cường độ dòng điện : $i = \frac{dq}{dt} = \omega q_0\cos(\omega t + \varphi)$

$$i(t) = 379{,}2.10^{-4}\cos\left(3160t + \frac{\pi}{2}\right)\ (A)$$

- Biểu thức hiệu điện thế của tụ điện :

$$u(t) = \frac{q}{C} = \frac{1{,}2.10^{-5}}{10^{-7}}\sin\left(3160t + \frac{\pi}{2}\right) = 120\sin\left(3160 + \frac{\pi}{2}\right)\ (V).$$

3. *Hiệu điện thế giữa hai bản tụ lúc t = 1ms :*

Lúc $t = 1(ms) = \frac{T_0}{2}(ms)$.

Biểu thức u(t) có thể viết :

$$u(t) = 120\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \frac{\pi}{2}\right) = 120\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.\frac{T_0}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 120\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 120(-1) = -120\ (V).$$

Ví dụ 2 : Một khung dao động gồm một cuộn dây chỉ có độ tự cảm L = 0,2H và tụ C = 10μF có dao động điện không tắt.

1. Biết cường độ cực đại trong khung là $i_{max} = 0{,}012A$. Tính hiệu điện thế cực đại (u_{max}) và hiệu điện thế tức thời giữa hai bản tụ lúc i = 0,01A.

2. Tính cường độ dòng điện tức thời i lúc điện tích tụ là $q = 1{,}22.10^{-5}C$ (với $i_{max} = 0{,}012A$).

Giải

1. *Hiệu điện thế cực đại và hiệu điện thế tức thời :*

Vì dao động không tắt nên năng lượng trong khung không đổi. Theo định luật bảo toàn năng lượng :

$$\frac{1}{2}L(i^2_{max}) = \frac{1}{2}C(u^2_{max}) = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} +\ \ u_{max} = \sqrt{\frac{L}{C}}.i_{max} = \sqrt{\frac{0{,}2}{10^{-5}}}.0{,}012 \approx 1{,}7\,(V) \\ +\ \ u = \sqrt{\frac{L}{C}\left(i^2_{max} - i^2\right)} = \sqrt{\frac{0{,}2}{10^{-5}}(0{,}012^2 - 0{,}01^2)} \approx 0{,}94\,(V) \end{cases}$$

2. *Cường độ tức thời i :* $\frac{1}{2}Li^2_{max} = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

$$i = \sqrt{i^2_{max} - \frac{q^2}{LC}} = \sqrt{0{,}012^2 - \frac{(1{,}22.10^{-5})^2}{0{,}2.10^{-5}}} \approx 0{,}008\,(A)$$

Ví dụ 3 : Khung cộng hưởng gồm cuộn tự cảm L và tụ C_1 bắt được sóng điện từ có bước sóng $\lambda_1 = 300m$. Thay C_1 bởi C_2 thì bắt được sóng $\lambda_2 = 400m$.

1. Tính tần số tiêng của khung trong hai trường hợp trên.

2. Nếu khung là cuộn L và hai tụ C_1, C_2 ghép song song thì bắt được sóng điện từ có bước sóng bao nhiêu ?

Giải

1. *Tần số riêng của khung :*

Tần số sóng điện từ có bước sóng λ là : $f_0 = \frac{3.10^8}{\lambda}$

Tần số riêng của khung khi bắt được sóng điện từ có bước sóng λ là :

$$f_0 = f = \frac{3.10^8}{\lambda}$$

Lúc bắt $\lambda_1 = 300m$: $f_{01} = \frac{3.10^8}{300} = 10^6\ (Hz)$

Lúc bắt $\lambda_2 = 400m$: $f_{02} = \frac{3.10^8}{400} = 7{,}5.10^5\ (Hz)$.

2. *Bước sóng điện từ bắt được lúc C_1 và C_2 mắc song song :*

- Với tụ C_1, tần số riêng của khung : $f_{01} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

  và nó bắt được sóng điện từ có bước sóng λ_1 cho bởi :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}} = \frac{3.10^8}{\lambda_1} \Rightarrow \quad LC_1 = \frac{\lambda_1^2}{(2\pi.3.10^8)^2}$$

- Với tụ C_2 : $LC_2 = \frac{\lambda_2^2}{(2\pi.3.10^8)^2}$

- Khi 2 tụ C_1 và C_2 mắc song song nó bắt được sóng điện từ có bước sóng λ cho bởi :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = \frac{3.10^8}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 2\pi.3.10^8\sqrt{LC_1 + LC_2} = 2\pi.3.10^8\sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{(2\pi.3.10^8)^2}} = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

$$= \sqrt{300^2 + 400^2} = 500\ (m).$$

ĐỀ THI

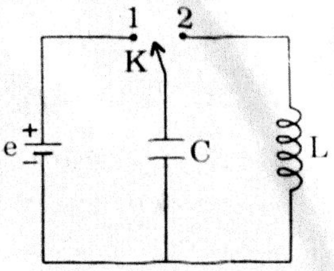
9.1 Cho mạch điện như hình vẽ với :

$C = 500pF$, $L = 0{,}2mH$,

$e = 1{,}5V$, lấy $\pi^2 = 10$.

Tại thời điểm $t = 0$ khóa K chuyển từ (1) sang (2).

Thiết lập biểu thức sự phụ thuộc của điện tích trên tụ C vào thời gian.



(HỌC VIỆN KĨ THUẬT QUÂN SỰ - 96)

Giải

Điện tích của tụ lúc khóa K còn ở (1) ($t \le 0$) là :

$$q = C.e = 500.10^{-12}.1{,}5 = 7{,}5.10^{-10}\ (C)$$

Khi khóa K bắt đầu chuyển qua (2) thì tụ bắt đầu phóng điện qua cuộn cảm, kể từ đó có dao động điện tự do trong mạch với tần số góc :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,2.10^{-3}.500.10^{-12}}} = 10^6\pi\ \text{(rad/s)}$$

Biểu thức của q theo t là : $q = q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Lúc $t = 0$ thì $q = 7{,}5.10^{-10}$ C và $i = 0$ nên :

$$\begin{cases} 7,5.10^{-10} = q_0 \sin\varphi & (1) \\ i = q' = \omega_0 q_0 \cos\varphi = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow \cos\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$(1) \rightarrow q_0 = \frac{7,5.10^{-10}}{\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)}$$

Để $q_0 > 0$ thì $\varphi = \frac{\pi}{2}$ và $q_0 = 7{,}5.10^{-10}$ C

Vậy : $q = 7{,}5.10^{-10}\sin\left(10^6\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (C).

9.2 Cho một mạch dao động điện từ gồm một tụ điện có điện dung $C = 5\mu F$ và một cuộn thuần cảm có độ tự cảm $L = 50mH$.

a) Xác định tần số dao động điện từ trong mạch.

b) Tính năng lượng của mạch dao động khi biết hiệu điện thế cực đại trên tụ điện là 6V.

c) Tìm năng lượng điện trường va năng lượng từ trường trong mạch khi biết hiệu điện thế trên tụ điện là 4V. Tìm cường độ dòng điện i khi đó.

(ĐH NGOẠI THƯƠNG – 98)

Giải

***1.** Tần số dao động điện từ trong mạch :*

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{50.10^{-3}.5.10^{-6}}} = \frac{10^{3}}{\pi}\,(Hz)$$

***2.** Năng lượng mạch dao động :*

$$W = \frac{1}{2}Cu^2_{max} = \frac{1}{2}.5.10^{-6}(6)^2 = 9.10^{-5}\,(J)$$

***3.** Năng lượng điện trường và năng lượng từ trường :*

- Năng lượng điện trường lúc $u_C = 4V$:

$$W_d = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}5.10^{-6}(4)^2 = 4.10^{-5}\,(J)$$

- Năng lượng từ trường lúc u = 4V là :

$$W_t = V - W_d = 9.10^{-5} - 4.10^{-5} = 5.10^{-5}\,(J)$$

- Mà : $W_t = \frac{1}{2}Li^2$

$$\Rightarrow \quad i = \sqrt{\frac{2W_t}{L}} = \sqrt{\frac{2.5.10^{-5}}{50.10^{-3}}} = 4,47.10^{-2}\,(A).$$

CHUYỂN ĐỘNG CHẤT ĐIỂM

(Dành cho học sinh chuyên ban)

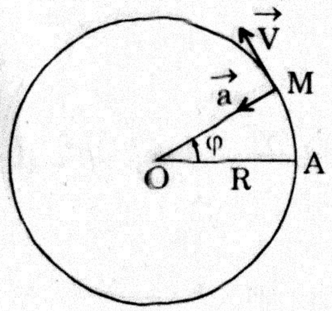
CHƯƠNG X

CHUYỂN ĐỘNG TRÒN ĐỀU

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Vị trí chất điểm trong chuyển động tròn đều*

- Hoành độ cong : $S = \overset{\frown}{AM}$
- Góc quét : $\varphi = \widehat{AOM}$
- Liên hệ : $S = R.\varphi$ (φ : rad)



2. *Vận tốc*

- Vận tốc dài : $\vec{V}\begin{cases} + \text{ Phương : tiếp tuyến quỹ đạo} \\ + \text{ Chiều : chiều chuyển động} \\ + \text{ Giá trị đại số : } V = \dfrac{dS}{dt} \end{cases}$
- Vận tốc góc : $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$
- Liên hệ : $V = R.\omega$

3. *Gia tốc hướng tâm*

$$\vec{a}\begin{cases} + \text{ Hướng tâm O} \\ + \text{ Độ lớn : } a = \dfrac{V^2}{R} = \omega^2 R \end{cases}$$

4. *Lực hướng tâm*

- Hướng vào tâm.
- Độ lớn : $F = m\omega^2 R = m\dfrac{V^2}{R}$

BÀI TẬP CƠ BẢN

Ví dụ 1 : Một bàn nằm ngang quay tròn đều với chu kì $T = 2s$. Trên bàn đặt một vật cách trục quay $R = 25cm$. Hệ số ma sát giữa vật và bàn tối thiểu bằng bao nhiêu để vật không trượt trên bàn.

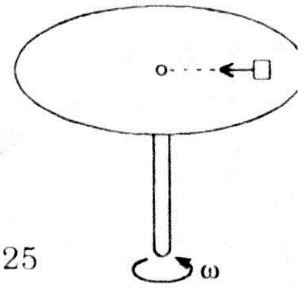
Lấy $g = 10m/s^2$ và $\pi^2 = 10$.

Giải

Khi vật không trượt thì lực ma sát nghỉ là lực hướng tâm :

$f_{ms\,(nghỉ)} = m\omega^2R$ (1)

với $f_{ms\,(nghỉ)} \leq \mu mg$ (2)



(1) và (2) cho : $m\omega^2R \leq \mu mg \rightarrow \mu \geq \dfrac{\omega^2R}{g}$

với $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$ (rad/s) nên : $\mu \geq \dfrac{\pi^2.0,25}{10} = 0,25$

Vậy $\mu_{min} = 0,25$.

Ví dụ 2 : Vòng xiếc là một vành tròn bán kính R = 8m nằm tron mặt phẳng thẳng đứng. Một người đi xe đạp trên vòng xiếc này. Khô lượng cả xe và người là 80kg. Lấy $g = 9,8m/s^2$.

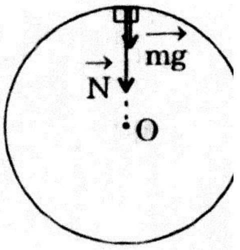
a) Tính lực ép của xe lên vòng xiếc tại điểm cao nhất với vận tốc tạ điểm này là v = 10m/s.

b) Để xe không rớt tại điểm cao nhất thì vận tốc tối thiểu phải là ba nhiêu ?

Giải

a) *Lực ép của xe lên vành xiếc :*

Tại điểm cao nhất xe chịu tác dụng 2 lực sau đây có cùng phươn thẳng đứng và hướng xuống (nên cũng hướng tâm O) :



+ Trọng lực $m\vec{g}$

+ Phản lực của vành $\vec{N}$. Hợp lực hướng tâm nên :

$$mg + N = m\frac{V^2}{R}$$

$$\rightarrow \quad N = m\left(\frac{V^2}{R} - g\right) = 80\left(\frac{10^2}{8} - 9,8\right) = 216\,(N)$$

Lực ép của xe lên vành xiếc có cùng độ lớn với phản lực N nhưn ngược hướng.

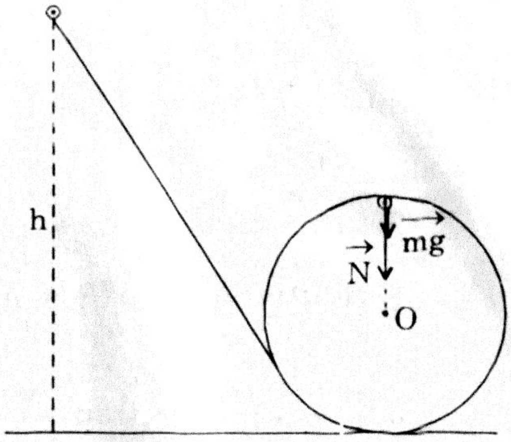
b) *Vận tốc tối thiểu của xe tại điểm cao nhất :*

Xe không rớt : $N \geq 0$

$$m\left(\frac{V^2}{R} - g\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad V \geq \sqrt{Rg} = 8,85\,(m/s)$$

$$V_{min} = 8,85\ (m/s).$$

Ví dụ 3 : Một quả cầu nhỏ được thả từ độ cao h cho trượt không ma sát trên một máng nghiêng và sau đó tiếp tục trượt trên phần máng được cuộn thành hình tròn bán kính R = 2m nằm trong mặt phẳng thẳng đứng (hình vẽ).



Tìm độ cao h tối thiểu để quả cầu có thể lên tới điểm cao nhất trên vành máng hình tròn.

Giải

Tại điểm cao nhất quả cầu chịu tác dụng hợp lực thẳng đứng hướng xuống tâm O nên đó là hợp lực hướng tâm. Vậy :

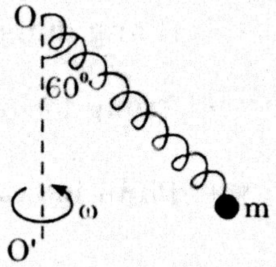
$$N + mg = m\frac{V^2}{R} \quad \rightarrow \quad N = m\left(\frac{V^2}{R} - g\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad V_{min}^2 = Rg \qquad (1)$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng : $mgh_{min} = \frac{1}{2}mV_{min}^2 + mg.2R$ (2)

(1) và (2) cho : $h_{min} = 2{,}5R = 5$ (m).

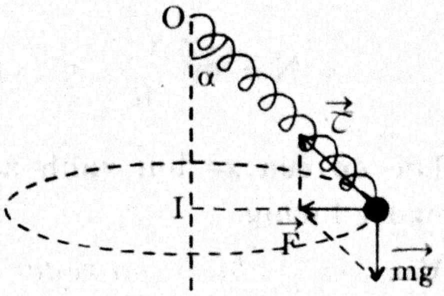
Ví dụ 4 : Một lò xo có khối lượng không đáng kể, độ dài tự nhiên 20cm, dãn ra thêm 1cm dưới tác dụng của lực kéo 0,1N.

Người ta treo vào lò xo một hòn bi có khối lượng 10g rồi quay lò xo xung quanh trục OO' thẳng đứng với vận tốc góc Ω (hình vẽ). Khi ấy trục của lò xo làm với trục quay OO' một góc $\alpha = 60^0$. Xác định chiều dài của lò xo và số vòng quay trong 1s. Lấy $g = 10m/s^2$.



Giải

Độ cứng lò xo : $K = \frac{0,1}{10^{-2}} = 10\,N/m$



Các lực tác dụng vào viên bi :

+ Trọng lực $m\vec{g}$

+ Lực đàn hồi $\vec{\tau}$ của lò xo.

Khi trục quay thì bi chuyển động tròn đều trong mặt phẳng nằm ngang nên hợp lực $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{\tau}$ hướng tâm với : $\vec{F} \perp \vec{P}$

và $F = m\omega^2R$ (*)

a) *Chiều dài lò xo :*

Hình vẽ cho : $\mathcal{T} = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0,01\times 10}{\cos 60^0} = 0,2\,(N)$

Định luật Húc : $\mathcal{T} = K.\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{\mathcal{T}}{K} = \frac{0,2}{10} = 0,02\,(m)$

Chiều dài lò xo : $l = l_0 + \Delta l = 22$ (cm).

b) *Số vòng quay **trong mỗi giây** :*

Số vòng quay **trong mỗi giây** là tần số f với : $\omega = 2\pi f$

Hình vẽ cho : $F = mg.tg\alpha$ và $R = l.\sin\alpha$

$(*) \Rightarrow \quad mg.tg\alpha = m(2\pi f)^2.l.\sin\alpha$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{g}{l.\cos\alpha}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{10}{0,22\cdot\frac{1}{2}}} \approx 1,5\ (v/s).$$

Ví dụ 5 : **Một mô tô chạy** trên đường vòng bán **kính** R = 50m. Mặt đường nằm **ngang. Hệ số** ma sát giữa mặt đường và bánh **xe** là $\mu = 0,2$.

a) Tính vận **tốc tối đa để xe không** bị trượt.

b) Xe chạy **với vận tốc** V = 32,4km/h, để xe không bị ngã **thì** xe phải nghiêng góc α **bao nhiêu** so với phương thẳng đứng. Lấy g = 10m/s^2.

Giải

a) *Vận tốc tối **đa để xe không** bị trượt :*

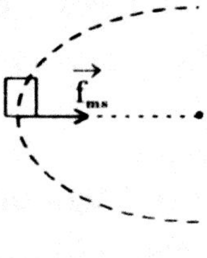
Khi xe chạy **đến chỗ đường** vòng, do quán tính nên **xe** có **xu** hướng đi thẳng. **Lực ma sát nghỉ xuất hiện** hướng vào bên **trong cản** trở xu hướng trượt **ra ngoài của xe.** Lúc này lực ma sát nghỉ là **lực hướng** tâm.

$$f_{ms\,(nghỉ)} = m\frac{V^2}{R}$$

với $f_{ms\,(nghỉ)} \le \mu mg$ **nên :** $m\frac{V^2}{R} \le \mu mg \rightarrow V \le \sqrt{\mu Rg}$

$V_{max} = \sqrt{\mu Rg} = \sqrt{0,2.50.10} = 10\,(m/s)$

$V_{max} = 36$ **(km/h).**

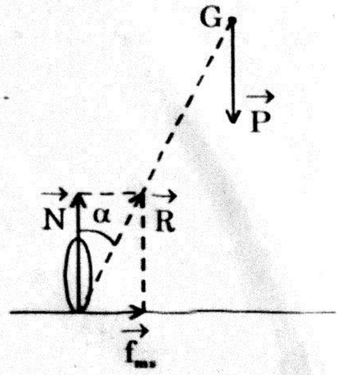


b) *Độ nghiêng của xe :*

Để xe không **bị ngã thì hợp** lực $\vec{R}$ của phản lực $\vec{N}$ và **lực ma** sát nghỉ $\vec{f}_{ms}$ phải có **giá đi qua khối** tâm G của xe.

Theo phương **thẳng đứng** : N = P = mg

Hình vẽ cho : $\text{tg}\alpha = \dfrac{f_{ms}}{N} = \dfrac{m\dfrac{V^2}{A}}{mg} = \dfrac{V^2}{Rg}$



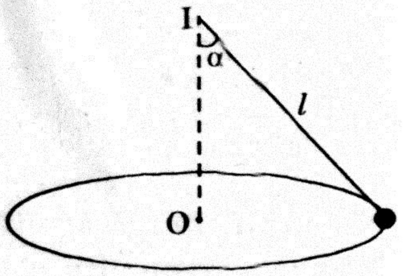
với $V = 32{,}4$ km/h $= 9{,}5$ m/s.

Ta được : $\text{tg}\alpha = \dfrac{9{,}5^2}{50.10} = 0{,}1805$

$\Rightarrow \quad \alpha \approx 10^0\ 10'$.

ĐỀ THI

10.1 Một vật M có khối lượng m = 100g treo vào đầu của một sợi dây không dãn có chiều dài l = 1m, đầu kia của sợi dây giữ cố định tại I. Đẩy vật cho nó chuyển động tròn đều trên mặt phẳng nằm ngang, góc α hợp bởi phương thẳng đứng và dây treo có giá trị không đổi và bằng 45^0.



1. Tính vận tốc dài V và vận tốc góc ω của vật.
2. Tính lực căng T của dây treo. Cho $g = 10\text{m/s}^2$.

(ĐH TÀI CHÁNH KẾ TOÁN HÀ NỘI – 98)

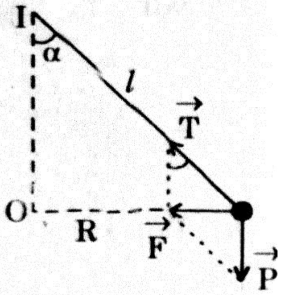
Giải

1. *Vận tốc dài V và vận tốc góc ω :*

Vật chịu tác dụng hai lực : sức căng $\vec{T}$ và trọng lực $\vec{P}$. Vì vật chuyển động tròn đều nên hợp lực hướng tâm. Hợp lực này vuông góc với $\vec{P}$ và có độ lớn $m\omega^2R$.

Hình vẽ cho : $\text{tg}\alpha = \dfrac{F}{P} = \dfrac{m\omega^2R}{mg} = \dfrac{\omega^2R}{g} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \dfrac{g.\text{tg}\alpha}{R}$

với $R = l\sin\alpha = 1.\sin45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707\ (\text{m})$



Vậy $\omega = \sqrt{\dfrac{10.1}{0{,}707}} = 3{,}76\ (\text{rad/s})$

Vận tốc dài : $V = \omega R = 3{,}76.0{,}707 = 2{,}66\ (\text{m/s})$.

2. *Lực căng T :*

$$T = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{0{,}1 \times 10}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 1{,}414\ (\text{N}).$$

10.2 Coi trái đất là một quả cầu có bán kính R = 6400km.

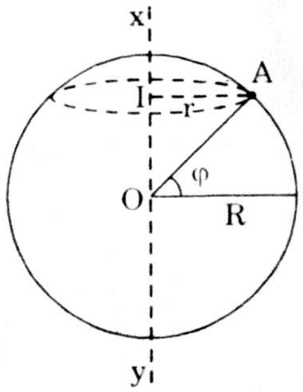
a) Tính vận tốc dài của một điểm trên mặt đất có vĩ độ $\varphi = 45^0$ trong chuyển động tự quay của trái đất.

b) Biết rằng tâm O của trái đất quay đều xung quanh Mặt Trời được một vòng hết 365 ngày. Bán kính quỹ đạo tâm O là 150 triệu km. Trục tự quay của Trái Đất đi qua O và vuông góc với mặt phẳng quỹ đạo của O. Chiều quay của Trái Đất quanh Mặt Trời và chiều tự quay của nó trùng nhau. Tính vận tốc của một điểm trên xích đạo của Trái Đất lúc nửa đêm (Coi Mặt Trời đứng yên).

(ĐH HÀNG HẢI - 98)

Giải

***a)** Vận tốc dài của A :*



Trái Đất tự quay xung quanh trục xy thì điểm A trên mặt đất có vĩ độ φ sẽ quay đều quanh tâm I trên trục xy có bán kính IA = r.

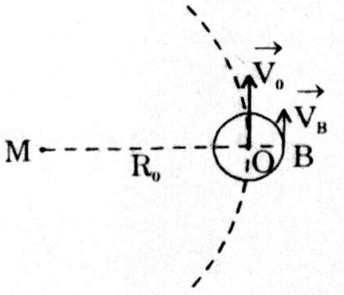
Vận tốc dài của A :

$$V = \omega.r = \frac{2\pi}{T}.R\cos\alpha \qquad \text{với} \begin{cases} T = 24 \text{ giờ } = 86400\text{s} \\ R = 6400\text{km} \\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{nên : } V_A = \frac{2\pi}{86400}\cdot 6400\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,3288859(\text{km/s}) \approx 0,33\ (\text{km/s}).$$

***b)** Vận tốc dài của một điểm trên xích đạo lúc nửa đêm :*

- Vận tốc tâm O của Trái Đất đối với Mặt Trời :



$$V_0 = \omega_0.R_0 = \frac{2\pi}{T_0}\cdot R_0$$

với $\quad T_0 = 365 \times 86400 = 31536.10^3$ (s)

$\qquad R_0 = 150.10^6 = 15.10^7$ (km)

$$\text{nên : } \quad V_0 = \frac{2\pi}{31536.10^3}\cdot 15.10^7 = 29,87\ (\text{km/s})$$

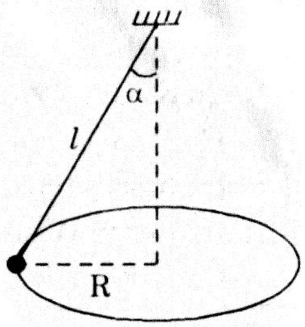
- Gọi B là một điểm trên xích đạo của Trái Đất lúc nửa đêm thì 3 điểm M (tâm Mặt Trời), O và B thẳng hàng. Với B xa tâm M hơn O. Vì hai chiều quay trùng nhau nên $\vec{V_0}$ và $\vec{V_B}$ (là vận tốc của B đối với tâm O) cùng hướng. Vậy vận tốc của B (đối với Mặt Trời) có độ lớn :

$V = V_0 + V_B$ trong đó :

$$V_B = \frac{2\pi}{T}\cdot R = \frac{2\pi}{86400}\cdot 6400 \approx 0{,}465\ (\text{km/s})$$

Vậy : $V = 29{,}87 + 0{,}465 = 30{,}335\ (\text{km/s}) \approx 30{,}34\ (\text{km/s})$.

10.3 Treo một viên bi có khối lượng m = 200g, vào một điểm cố định bằng một sợi dây không dãn, không khối lượng dài l = 1m. Quay cho viên bi chuyển động quanh trục thẳng đứng đi qua điểm treo sao cho sợi dây tạo với phương thẳng đứng một góc $\alpha = 30^0$.



a) Tìm bán kính quỹ đạo R, tần số góc của chuyển động.

b) Tính lực căng T của sợi dây. Nếu dây chịu được lực căng tối đa T_{max} = 4 thì tần số góc của chuyển động ω_{max} là bao nhiêu trước khi đứt. Ch $g = 10\text{m/s}^2$.

(HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG – 9

Giải vắn tắt

a) *Bán kính quỹ đạo R và tần số góc ω :*

- $R = l.\sin\alpha = 1.\sin 30^0 = 0{,}5\text{m}$
- $\omega = \sqrt{\dfrac{g.\text{tg}\alpha}{R}} = \sqrt{\dfrac{10.\text{tg}30^0}{0,5}} \approx 3{,}4$ rad/s

b) *Lực căng T và tần số góc trước khi dây đứt :*

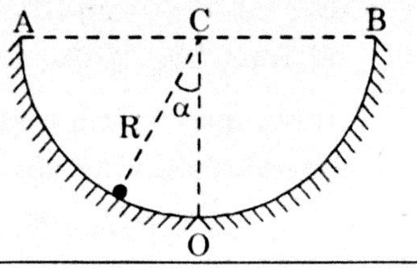
- $T = \dfrac{P}{\cos\alpha} = \dfrac{0,2\times 10}{\cos 30^0} \approx 2{,}3\ (\text{N})$
- Khi thay đổi tần số góc ω thì bán kính R và góc α sẽ thay đổi theo. T tính T theo ω.

Ta có : $\sin\alpha = \dfrac{F}{T} = \dfrac{m\omega^2 R}{T}$

với $R = l.\sin\alpha$ nên : $\sin\alpha = \dfrac{m\omega^2.l.\sin\alpha}{T} \Rightarrow T = m\omega^2 l \le T_{max}$

$$\omega \le \sqrt{\frac{T_{max}}{ml}} = \sqrt{\frac{4}{0,2.1}} = 4,47 \quad\rightarrow\quad \omega_{max} = 4{,}47\ (\text{rad/s}).$$

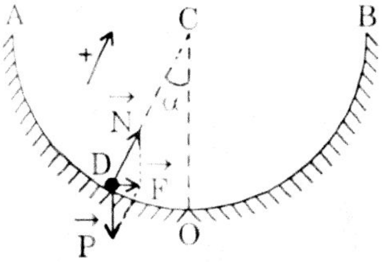
10.4 Một vật khối lượng m = 0,1kg trượt không ma sát trên một máng trục đường kính AB nằm ngang, bán kính R = 1m như hình vẽ. Vật trượt không vận tốc đầu từ điểm A.



Thiết lập công thức tính phản lực N của máng lên vật theo góc α và tìm giá trị của N khi $\alpha = 60^0$. Bỏ qua sức cản không khí. Lấy $g = 10m/s^2$.

(ĐHQG TP.HCM – 97)

Giải



Lấy O làm mốc thế năng. D là vị trí của vật được xác định bởi góc $\widehat{OCD} = \alpha$.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng :

$$E_A = E_D$$

$$mg.R = mgh_D + \frac{1}{2}mV^2$$

với $h_D = R - R\cos\alpha = R(1 - \cos\alpha)$ nên :

$$mgR = mgR(1 - \cos\alpha) + \frac{1}{2}mV^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V^2}{R} = 2g\cos\alpha$$

Mặt khác, hợp lực tác dụng vào vật khi qua D là : $\vec{F} = \vec{N} + \vec{P}$

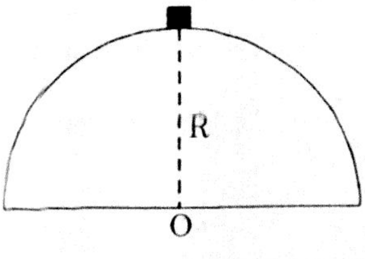
Chiếu xuống bán kính CD (chiều dương từ D → C) thì :

$$m\frac{V^2}{R} = N - P\cos\alpha$$

$$N = m\left(\frac{V^2}{R} + g\cos\alpha\right) = m(2g\cos\alpha + g\cos\alpha) = 3mg\cos\alpha$$

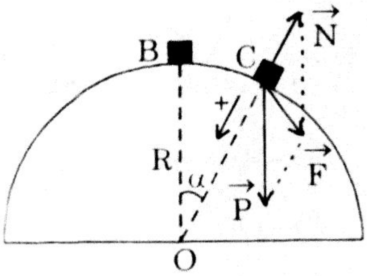
với $\alpha = 60^0$ thì : $N = 3.0,1.10.\frac{1}{2} = 1,5$ (N).

0.5 Một vật nhỏ A bắt đầu trượt từ đỉnh của một mặt cầu bán kính R = 90cm xuống dưới không vận tốc đầu, không ma sát. Tính vận tốc của vật A tại vị trí vật bắt đầu tách khỏi mặt cầu. Cho gia tốc trọng trường $g = 10m/s^2$.



(ĐH THỦY SẢN – 98)

Giải



Lấy mốc thế năng tại O. Ta có :

$$E_B = E_C$$

$$mgR = \frac{1}{2}mV^2 + mgh_C$$

với $h_C = R\cos\alpha$ nên $mgR = \frac{1}{2}mV^2 + mgR\cos\alpha$

$$\frac{V^2}{R} = 2g(1 - \cos\alpha) \qquad (1$$

Mặt khác hợp lực tác dụng vào vật ở C : $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N}$

Chiếu xuống bán kính OC (chiều dương từ C → O)

$$m\frac{V^2}{R} = mg\cos\alpha - N \quad \Rightarrow \quad N = m\left(g\cos\alpha - \frac{V^2}{R}\right)$$

Vậy bắt đầu rời bán cầu khi N = 0

Suy ra : $$\frac{V^2}{R} = g\cos\alpha \qquad (2$$

(1) và (2) cho : $2g(1 - \cos\alpha) = g\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{2}{3}$

(2) → $V^2 = gR\cos\alpha = gR\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{10.90.\frac{2}{3}} = 24,5\,(cm/s).$

10.6 Một mô tô đi trên cung đường có bán kính R = 65m. Mặt đường nằn ngang. Hệ số ma sát trượt giữa bánh xe và mặt đường lúc trời nắng l $K_1 = 0,44$, lúc trời mưa là $K_2 = 0,125$.

a) Tính các vận tốc tối đa của xe để xe không trượt.

b) Trời nắng, xe đi với vận tốc V = 60km/h xe phải nghiêng một góc bằn bao nhiêu để không đổ. Lấy $g = 10m/s^2$.

(ĐH NÔNG NGHIỆP I – 96

Giải

a) *Các vận tốc tối đa để xe không trượt :*

Để xe không trượt khi đi trên cung đường tròn thì lực ma sát nghỉ l lực hướng tâm : $f_{ms\,(nghỉ)} = m\frac{V^2}{R}$

với $f_{ms\,(nghỉ)} \le Kmg$ nên : $m\frac{V^2}{R} \le Kmg \quad \Rightarrow \quad V \le \sqrt{KRg}$

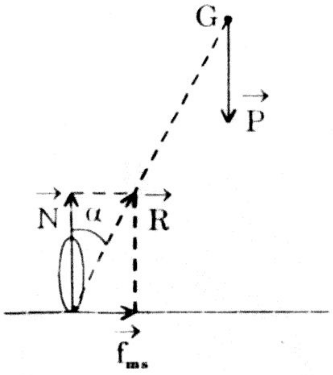
$$V_{max} = \sqrt{KRg}$$

- Lúc trời nắng : $V_{1\,(max)} = \sqrt{K_1Rg} = \sqrt{0,44.65.10} \approx 16,9$ (m/s)
- Lúc trời mưa : $V_{2\,(max)} = \sqrt{K_2Rg} = \sqrt{0,125.65.10} \approx 9$ (m/s).

b) *Độ nghiêng của xe để xe không đổ :*

Để xe không đổ thì hợp lực $\vec{R}$ của phản lực $\vec{N}$ và lực ma sát ngh

$(\vec{F}_{ma})$ phải có giá đi qua khối tâm G của xe. Muốn vậy xe phải nghiêng một góc α (so với đường thẳng đứng).



Ta có : $\text{tg}\alpha = \dfrac{f_{ms}}{N}$

với : $f_{ms} = m\dfrac{V^2}{R}$ và $N = P = mg$

nên : $\text{tg}\alpha = \dfrac{V^2}{R}$ $\begin{cases} V = 60\text{km/h} \approx 16,7\text{m/s} \\ R = 65\text{m} \\ g = 10\text{m/s} \end{cases}$

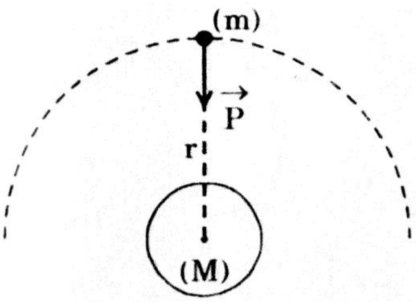
$$= \frac{16,7^2}{65.10} \approx 0,43 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 23^0\ 18'.$$

10.7 Ta coi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo tròn có tâm là tâm của Trái Đất và bán kính $r = 3,8 \times 10^5$ (km). Tìm thời gian T mà Mặt Trăng quay một vòng quanh Trái Đất, biết bán kính Trái Đất $R = 6400$ (km) và gia tốc rơi tự do trên mặt đất $g_0 = 9,8\text{m/s}^2$.

(ĐHQG TPHCM – ĐỢT 1 – 98)

Giải

Trọng lực của Mặt Trăng là lực hướng tâm :



$$P = mg = m\omega^2 r \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

hay $\dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{g}{r}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g}}$

Mặt khác, gia tốc g tại độ cao r và gia tốc g tại mặt đất cho bởi :

$$\left.\begin{aligned} g &= G\frac{M}{r^2} \\ g_0 &= G\frac{M}{R^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{g}{g_0} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad g = g_0\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

Vậy : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g_0\left(\dfrac{R}{r}\right)^2}} = 2\pi \cdot \dfrac{r}{R} \cdot \sqrt{\dfrac{r}{g_0}}$

với : $r = 3,8.10^5\ \text{km} = 3,8.10^8\ \text{m}$; $R = 6400\text{km} = 64.10^5\ \text{m}$

nên : $T = 2\pi \cdot \dfrac{3,8.10^8}{64.10^5} \cdot \sqrt{\dfrac{3,8.10^8}{9,8}} \approx 2,3.10^6\ (\text{s}).$

Chương XI

CHUYỂN ĐỘNG NÉM XIÊN

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

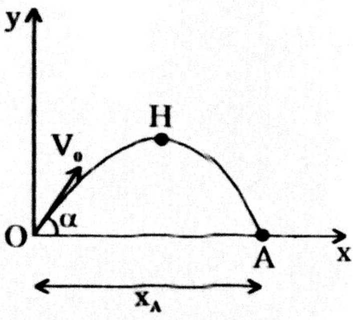
1. *Chuyển động của vật bị ném xiên*

- **Phương** trình chuyển động $\begin{cases} x = V_0 \cos \alpha t \\ y = -\dfrac{1}{2} gt^2 + V_0 \sin \alpha t \end{cases}$

- **Phương** trình quỹ đạo : $y = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + tg\alpha.x$

- **Tầm ném** : $x_A = \dfrac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

- **Độ cao cực đại** : $y_H = \dfrac{(V_0 \sin \alpha)^2}{2g}$



2. *Chuyển động của vật ném ngang*

- **Phương trình** chuyển động : $\begin{cases} x = V_0 t \\ y = \dfrac{1}{2} gt^2 \end{cases}$

- **Phương trình** quỹ đạo : $y = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{g}{V_0^2} x^2$

BÀI TẬP CƠ BẢN

Ví dụ 1 : Một vật được ném lên **từ mặt đất** theo phương xiên góc. **Tại điểm cao nhất** của quỹ đạo vật **có vận tốc bằng** một nửa vận tốc ban đầu và độ cao $h_0 = 15m$. Lấy $g = 10m/s^2$.

a) Tính vận tốc ban đầu V_0 và **góc ném** α.

b) Viết phương trình chuyển động và **phương trình** quỹ đạo **của vật**.

c) Tính tầm ném.

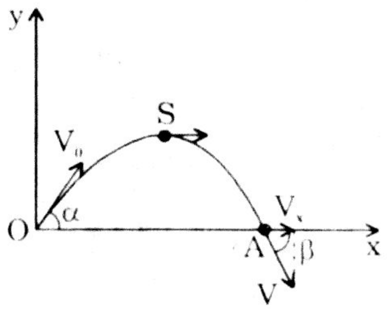
d) Xác định vận tốc (cả hướng và **độ lớn**) **của vật khi** chạm đất.

Giải

a) Vận tốc ban đầu *V_0 và góc α :*

- **Tại điểm cao nhất** vận tốc của vật có **độ lớn** : $V_S = V_0\cos\alpha$

Theo đề $V_S = \frac{V_0}{2}$ nên :



$$V_0\cos\alpha = \frac{V_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^0.$$

- Độ cao đỉnh S : $h_S = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g} = h_0$

$$\Rightarrow \quad V_0 = \sqrt{\frac{2gh_0}{\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{2gh_0}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2.10.15}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 20\text{m/s}.$$

b) Phương trình chuyển động và phương trình quỹ đạo :

$$\text{Chọn} \begin{cases} \bullet \text{ Gốc O là chỗ ném} \\ \bullet \text{ Hệ trục tọa độ vuông góc xOy} \\ \bullet \text{ Gốc thời gian là lúc ném} \end{cases}$$

Phương trình chuyển động : $x = V_0.\cos\alpha.t = 20.\frac{1}{2}t = 10t$ (m)

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\sin\alpha t = -5t^2 + 10\sqrt{3}\,t \text{ (m)}$$

Phương trình quỹ đạo :

$$y = -\frac{1}{2}\cdot\frac{g}{(V_0\cos\alpha)^2}x^2 + \text{tg}\alpha.x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{\left(20\cdot\frac{1}{2}\right)^2}x^2 + \text{tg}60^0\,x$$

$$y = -\frac{x^2}{20} + \sqrt{3}\,x \text{ (cm)}.$$

c) Tầm ném : $x_A = \frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{20^2.\sin 120^0}{10} = 20\sqrt{3} \approx 34,64$ (m).

d) Vận tốc của vật khi chạm đất :

Theo định luật bảo toàn cơ năng : $E_0 = E_A$

Lấy mốc thế năng tại mặt đất thì :

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV^2 \quad \Rightarrow \quad V = V_0 = 20 \text{ (m/s)}$$

$\vec{V}$ hợp với mặt đất góc β mà :

$$\cos\beta = \frac{V_X}{V} = \frac{V_0\cos\alpha}{V_0} = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha = 60^0.$$

Ví dụ 2 : Một vật được ném ngang thì độ cao h = 2m trên mặt đất với vận toc $V_0 = 11m/s$. Lấy $g = 10m/s^2$.

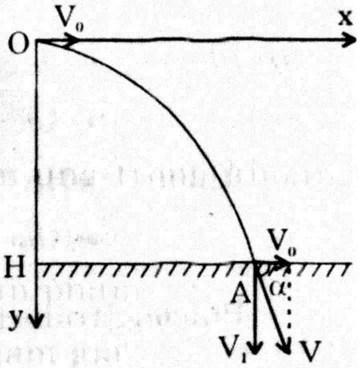
a) Viết phương trình chuyển động và phương trình quỹ đạo của vật.

b) Tính thời gian rơi và khoảng cách chỗ chạm đất đến đường thẳng đứng qua chỗ ném.

c) Xác định phương và độ lớn của vận tốc lúc chạm đất.

Giải

a) *Phương trình quỹ đạo và phương trình chuyển động của vật :*



Chọn
- Gốc tọa độ là chỗ ném
- Hệ trục tọa độ vuông góc xOy
- Gốc thời gian là lúc ném

Phương trình chuyển động :

$$\begin{cases} x = V_0t = 11t\,(m) \\ y = \dfrac{1}{2}gt^2 = 5t^2\,(m) \end{cases}$$

Phương trình quỹ đạo : $y = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{g}{V_0^2}x^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{10}{11^2}x^2 = \dfrac{5x^2}{121}\,(m)$

b) *Thời gian rơi và khoảng cách HA :*

- Thời gian rơi : $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \sqrt{\dfrac{2.2}{10}} \approx 0,63\,(s)$
- Thay t = 0,63 (s) vào x = 11t, ta được : $HA = 11.0,63 = 6,93\,(m)$

c) *Vận tốc khi chạm đất :*

Lấy mốc thế năng tại mặt đất. Ta có : $\dfrac{1}{2}mV_0^2 + mgh = \dfrac{1}{2}mV^2$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2gh + V_0^2} = \sqrt{2.10.2 + 11^2} \approx 12,7\,(m/s)$$

Vận tốc $\vec{V}$ hợp với mặt đất góc α cho bởi :

$$\cos\alpha = \frac{V_0}{V} = \frac{11}{12,7} = 0,866 \Rightarrow \alpha = 30^0.$$

ĐỀ THI

11.1 Một vật coi như chất điểm được ném lên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $V_0 = 10m/s$ theo phương hợp với phương ngang một góc (gọi là góc ném) $\alpha = 30^0$.

1. Tìm khoảng cách từ điểm ném đến điểm rơi.

2. Nếu giữ nguyên độ lớn của V_0 mà thay đổi góc ném thì với giá trị nà của góc ném vật lại rơi đúng điểm rơi như mục 1.

Cho biết gia tốc trọng trường $g = 10m/s^2$. Bỏ qua ma sát và lực cản.

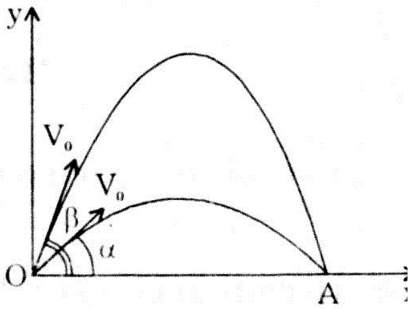
(ĐHQG HÀ NỘI - 97

Giải

1. *Khoảng cách từ điểm ném đến điểm rơi :*

Tầm ném : $$x_A = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{10^2 . \sin 60^0}{10} = 8,66\,(m). \quad (1$$

2. *Giá trị góc ném để vật lại rơi ở A :*



Gọi β là góc ném phải tìm thì :

$$x_A = \frac{V_0^2 \sin 2\beta}{g} \quad (2)$$

(1) và (2) cho : $\sin 2\beta = \sin 2\alpha$

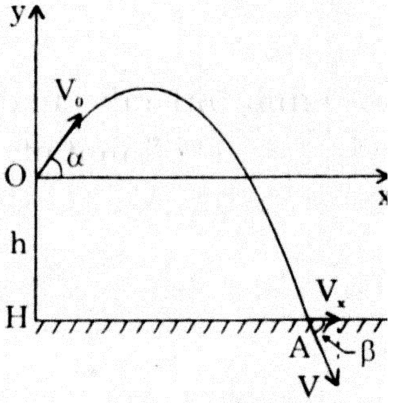
Vì $\beta \neq \alpha$ nên : $2\beta = \pi - 2\alpha$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad \text{hay} \quad \beta = 60^0.$$

11.2 Từ một đỉnh tháp cao 11,25m so với mặt đất người ta ném một hòn đ lên phía trên với vận tốc ban đầu bằng 54km/h theo phương hợp vớ phương nằm ngang một góc bằng 45^0. Coi gia tốc trọng trường bằn $10m/s^2$. Bỏ qua sức cản không khí và coi hòn đá là chất điểm. Xác địn phương, chiều, độ lớn của vectơ vận tốc của hòn đá lúc nó chạm đất.

(ĐH BÁCH KHOA HÀ NỘI - 97

Giải



Chọn mốc thế năng tại mặt đất.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng :

$$\frac{1}{2} mV_0^2 + mgh = \frac{1}{2} mV^2$$

$$\Rightarrow \quad V = \sqrt{V_0^2 + 2gh} = \sqrt{15^2 + 2.10.11,25}$$

$$= 15\sqrt{2} \approx 21,2\,(m/s)$$

Vận tốc $\vec{V}$ hợp với mặt đất góc β cho bởi :

$$\cos\beta = \frac{V_X}{V} = \frac{V_0 \cos\alpha}{V} = \frac{15 . \cos 45^0}{15\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = 60^0.$$

11.3 Từ đỉnh tháp với độ cao h, một vật được ném theo phương ngang với vận tốc ban đầu V_0. Vật bay sau t = 4 (s) thì chạm đất. Khoảng cách từ điểm chạm đất đến chân tháp là 40 (m).

a) Xác định h và V_0.

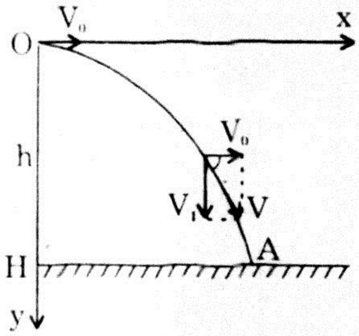
b) Tính vận tốc của vật lúc t = 3 (s).

Bỏ qua ma sát giữa vật và không khí. Lấy $g = 10m/s^2$.

(HỌC VIỆN NGÂN HÀNG TP.HCM – 98)

Giải

a) *Xác định h và V_0 :*



- $$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 4^2 = 80\,(m)$$

- $$x = HA = V_0t$$

$$V_0 = \frac{HA}{t} = \frac{40}{4} = 10\,(m/s)$$

b) *Vận tốc của vật lúc t = 3s :*

Có : $V = \sqrt{V_1^2 + V_0^2} = \sqrt{(gt)^2 + V_0^2} = \sqrt{(10.3)^2 + 10^2} \approx 31,6\,(m/s)$.

11.4 Từ độ cao h = 50 (m), một vật được ném theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu V_0. Biết vật chạm đất chậm hơn 1 giây so với trường hợp thả vật rơi tự do cũng từ độ cao đó. Chọn gốc tọa độ O là điểm ném, trục Oy hướng xuống, t = 0 là lúc ném vật. Cho $g = 9,8m/s^2$, bỏ qua sức cản môi trường. (Các kết quả tính được lấy hai chữ số có nghĩa)

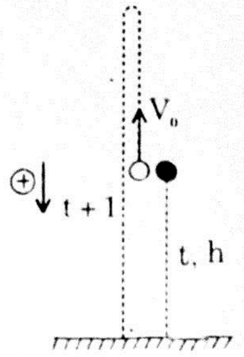
1. Tìm V_0. Viết phương trình chuyển động của vật.

2. Tại thời điểm nào vật có động năng và thế năng bằng nhau.

(ĐH GIAO THÔNG VẬN TẢI – 98)

Giải

1. *V_0 và phương trình chuyển động của vật :*



Thời gian vật rơi tự do :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2.50}{9,8}} = \frac{10}{\sqrt{9,8}}\,(s)$$

Thời gian vật ném theo phương đứng :

$$t_1 + 1 = \frac{10}{\sqrt{9,8}} + 1 = 4,1943827\,(s)$$

Phương trình vật ném đứng : $y = \frac{1}{2}gt^2 - V_0t$ (1)

Lúc vật chạm đất : $y = h = 50m$ và $t = t_1 + 1$

$$h = \frac{1}{2}g(t_1 + 1)^2 - V_0(t_1 + 1)$$

$$50 = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \times 17,592846 - 4,1943827V_0$$

$$V_0 = 8,6317695\ (m/s) \approx 8,63\ (m/s)$$

(1) → $y = 4,9t^2 - 8,63t.$

2. ***Thời điểm vật có động năng và thế năng bằng nhau :***

Theo định luật bảo toàn cơ năng : $E = E_đ + E_t = 2E_t$ (2)

Chọn mốc thế năng tại mặt đất thì :

$$E_t = mgh;$$

$$E = mgh + \frac{1}{2}mV_0^2$$

(h' là độ cao của vật vào thời điểm phải tìm)

(2) → $mgh + \frac{1}{2}mV_0^2 = 2mgh'$

$$2gh' + V_0^2 = 4gh'$$

$$h' = \frac{V_0^2}{4g} + \frac{h}{2} = \frac{8,63^2}{4 \times 9,8} + \frac{50}{2} = 26,9\,(m)$$

h' < h : vị trí phải tìm có $y = h - h' = 23,1$ (m)

(1) → $23,1 = 4,9t'^2 - 8,63t'$

$$\sqrt{\Delta} = 22,96$$

$$t' = \frac{8,63 \pm 22,96}{2.4,9}$$

Chỉ nhận : $t' = 3,22$ (s).

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 7547936. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: HẢI ĐĂNG

Trình bày bìa: THÁI VĂN

Sửa bài: PHƯƠNG THẢO

Ôn thi đại học môn Vật Lý

Mã số: 1L – 141ĐH 2006

In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xưởng in Chi nhánh Công ti Phát triển Công nghệ
Truyền hình - TP. Hồ Chí Minh.

Số xuất bản 754 - 2006/CXB/28 - 143/ĐHQGHN, ngày 02/10/2006.

Quyết định xuất bản số: 339LK/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2006.